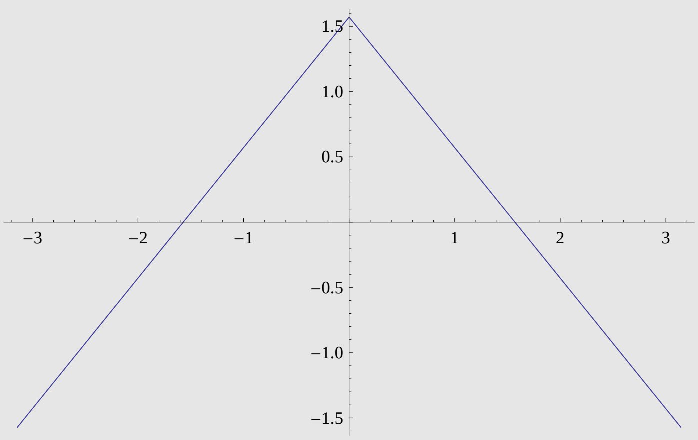
Uitwerkingen voorbeeldtentamen 8C080 - 02

Opgave 1

1. Bereken alle Fourier coefficienten van de volgende periodieke driehoeksfunctie
($-\pi \leq x \leq \pi$, de gegeven periode wordt oneindig herhaald):

$$f[x\_] := \text{Piecewise}\left[\begin{pmatrix} x + \frac{\pi}{2} & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} - x & x \geq 0 \end{pmatrix}\right]$$

```
Plot[f[x], {x, -π, π}]
```



Splitsen in twee functies:

$$a[k\_] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\text{Cos}[k\,x]\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)\text{Cos}[k\,x]\,dx$$

$$-\frac{1}{k^2\,\pi}\left(-2 + 2\,\text{Cos}[k\,\pi] + k\,\pi\,\text{Sin}[k\,\pi]\right)$$

```
Table[a[k], {k, 1, 10}]
```

$$\left\{\frac{4}{\pi}, 0, \frac{4}{9\,\pi}, 0, \frac{4}{25\,\pi}, 0, \frac{4}{49\,\pi}, 0, \frac{4}{81\,\pi}, 0\right\}$$

De eerste term is:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\text{Cos}[k\,x]\,dx$$

$$-\frac{-1 + \text{Cos}[k\,\pi]}{k^2\,\pi}$$

With k an integer:

```
Simplify[1/π ∫_{-π}^{0} (x + π/2) Cos[k x] ⅆx, k ∈ Integers]
```

$$-\frac{-1+(-1)^k}{k^2 \pi}$$

met de hand: de eerste term (met partieel integreren) wordt:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{Cos}[k\,x]\,dx = \frac{1}{\pi}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{Sin}[k\,x]}{k}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(+1)\frac{\mathrm{Sin}[k\,x]}{k}\,dx =$$

$$0 - \frac{\mathrm{Cos}[k\,x]}{\pi\,k^2}\Big|_{-\pi}^{0} = -\frac{\mathrm{Cos}[k\,\pi]}{\pi\,k^2} + \frac{\mathrm{Cos}[0]}{\pi\,k^2} = \frac{-(-1)^k+1}{\pi\,k^2}$$

De tweede term wordt:

```
Simplify[1/π ∫_{0}^{π} (-x + π/2) Cos[k x] ⅆx, k ∈ Integers]
```

$$-\frac{-1+(-1)^k}{k^2 \pi}$$

Met de hand:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{Cos}[k\,x]\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{Sin}[k\,x]}{k}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\frac{\mathrm{Sin}[k\,x]}{k}\,dx =$$

$$0 + \frac{\mathrm{Cos}[k\,x]}{\pi\,k^2}\Big|_{0}^{\pi} = \frac{\mathrm{Cos}[0]}{\pi\,k^2} - \frac{\mathrm{Cos}[k\,\pi]}{k^2} = \frac{1-(-1)^k}{\pi\,k^2}$$

Dus de totale integraal is:

$$a_k = \frac{-(-1)^k+1}{\pi\,k^2} + \frac{1-(-1)^k}{\pi\,k^2} = \frac{2\left(1-(-1)^k\right)}{k^2\,\pi}$$

Check:

```
Table[2 (1 - (-1)^k) / (k^2 π), {k, 1, 10}]
```

$$\left\{\frac{4}{\pi}, 0, \frac{4}{9\pi}, 0, \frac{4}{25\pi}, 0, \frac{4}{49\pi}, 0, \frac{4}{81\pi}, 0\right\}$$

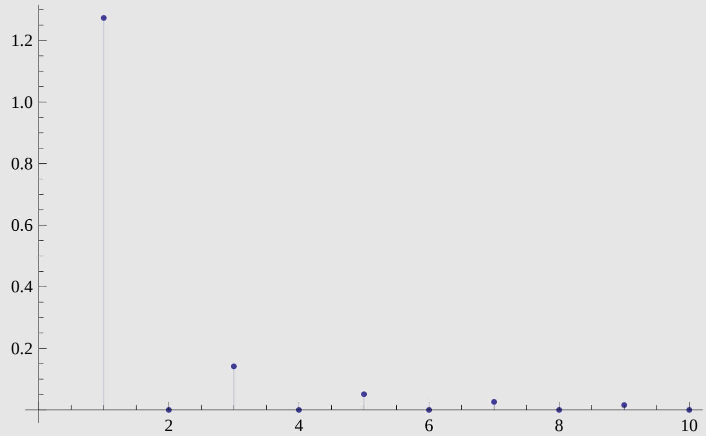
Alle b_l coefficienten zijn nul, want we hebben een symmetrische functie (lijkt op een cosinus functie). Check:

```
b[k_] = 1/π ∫_{-π}^{0} (x + π/2) Sin[l x] ⅆx + 1/π ∫_{0}^{π} (-x + π/2) Sin[l x] ⅆx // Simplify
```

0

Plot van het spectrum:

```
ListPlot[Table[a[k], {k, 1, 10}], Filling → Axis, PlotRange → All]
```



Opgave 2

a. Geef de formules voor de convolutie integraal en de correlatie integraal voor een 1D continu signaal f(x) met een kernel g(x), als functie van de plaats x.

$$h[x] = \int_{-\infty}^{\infty} f[\alpha]\, g[x - \alpha]\, d\alpha$$

$$h[x] = \int_{-\infty}^{\infty} f[\alpha]\, g[x + \alpha]\, d\alpha$$

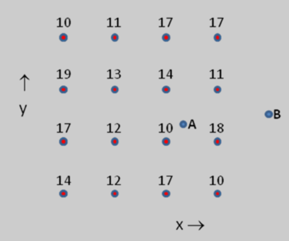
b. Geef dezelfde formules voor een 2D discreet beeld f(x,y) met een kernel g(x,y), eveneens als functie van de plaats (x_i, y_j).

$$h[x, y] = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} f[x_i, y_j]\, g[x - x_i, y - y_j]$$

$$h[x, y] = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} f[x_i, y_j]\, g[x + x_i, y + y_j]$$

Opgave 3

Interpolatie en extrapolatie: hieronder is een klein gedeelte van een 2D beeld gegeven.



a. Bereken de geinterpoleerde waarde van het punt A (3.25, 2,25).

$$c = \frac{3}{4}\,10 + \frac{1}{4}\,18;$$
$$d = \frac{3}{4}\,14 + \frac{1}{4}\,11;$$
$$A = \frac{3}{4}\,c + \frac{1}{4}\,d \;//\; N$$

12.3125

b. en de geëxtrapoleerde waarde van het punt B (5, 2.5).

$$c = 18 + 8;$$
$$d = 11 - 3;$$
$$A = \frac{1}{2}\,c + \frac{1}{2}\,d \;//\; N$$

17.

Opgave 4

Gegeven zijn twee 3D datasets van dezelfde patient, nl. een CT scan en een MRI scan van het hoofd.

a. Beschrijf hoe de Joint Probability Density Function van deze twee datasets eruit ziet.

Antw: JPDF is een 2D histogram van paren.

b. Geef de formule voor de Joint Entropy H(A,B) van de twee datasets.

Antw: H[A,B] = $-\sum_{a=1}^{N_a} \sum_{b=1}^{N_b} p[a, b] \operatorname{Log}[p[a, b]]$

Opgave 5

Een digitaal beeld im wordt geconvolueerd met een digitaal 3 x 3 lopend gemiddelde filter.Het resultaat heet im2.Daarna wordt im2 nogmaals gefilterd met hetzelfde filter.Dit geeft im3.Teken de kernel die in één keer het beeld im omzet in im3.

Antw. Het lopend gemiddelde filter is $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Twee maal dit toepassen geeft de convolutie van het filter met het filter: $\frac{1}{81}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Opgave 6

a(0) is het gemiddelde. $\mu \to 1.4\ (\mu+20)$, dus a(0) wordt 1.4 a(0) + 28.

De overige Fourier coefficienten worden alle 1.4 maal groter.

Opgave 7

Gradient descent.
a. Wat wordt verstaan onder het gradient descent algoritme?

Antw: Het zo snel mogelijk bereiken van het minimum in de cost function door te lopen langs de gradient van de cost function.

b. Waarvan wordt de gradient berekend?

Antw: van de cost function.