Examen Inleiding Meten en Modelleren
Vakcode 8C120, 11 april 2012, 14.00–17.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Indien u een opgave niet kunt maken, geef dan aan hoe u de opgave zou maken; dat kan een deel van de punten opleveren. Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Bijlage: domeinentabel. Veel succes!

1. Ultrageluid metingen met hoge frequenties

Metingen met ultrageluid worden gedaan met hoog-frequente transducers, die piezo-elektrische kristallen bezitten.

a) Wat is de precieze functie van de piezo-elektrische kristallen?

Genereren en meten van ultrasone geluidsgolven, die het lichaam worden ingestuurd. Uit de reflecties wordt een beeld gereconstrueerd.

b) Wat is het principe van de werking van het kristal?

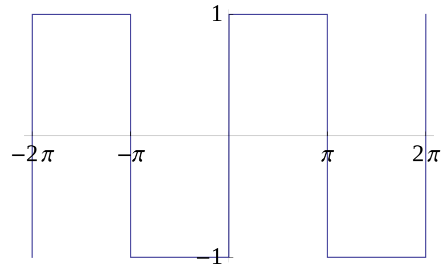
De kristallen deformeren onder invloed van een elektrische spanning, voor ultrageluid typisch met hoge frequentie (megahertzen). Daardoor zenden ze hoog-frequente geluidsgolven uit. Andersom, als een kristal gedeformeerd wordt, geeft het een kleine spanning af. Het zelfde kristal wordt dus ook gebruikt om de amplitude van de gereflecteerde geluidsgolf te meten.

Een standaard transducer voor buik-onderzoek wordt aangestuurd met een sinusvormig signaal met een frequentie van 5 MHz. Met een hogere aanstuurfrequentie kun je echter kleinere details in de patiënt waarnemen dan met een lage frequentie.

c) Waarom is dat zo?

Bij een hogere frequentie is de golflengte van het uitgezonden geluid korter, en kunnen reflecties van kleinere details plaatvinden.

Een slimme fabrikant heeft nu besloten de frequentie van het aansturen van een transducer van 5 MHz te verhogen naar 15 MHz. Hij doet dat door de aansturende versterker zo uit te sturen, dat deze in plaats van een sinus een blokgolf van 5 MHz afgeeft. De transducer output volgt de aansturende spanning precies.



Twee periodes van de blokspanning van 5 MHz.

d) Hoeveel amplitude van 15 MHz krijgt de fabrikant uit zijn transducer, vergeleken met de amplitude van 5 MHz die we op 100% stellen?

Er zijn alleen sinus termen. De frequentie van 15 MHz is 3x de basis frequentie. De verhouding van de Fourier coëfficiënten wordt dus:

$$\frac{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin 3x \, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin 3x \, dx}{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin x \, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x \, dx} = \frac{1}{3}$$

2. **Gekoppelde differentiaal vergelijkingen**

De ‘predator – prey’ vergelijkingen zijn een beroemd stel gekoppelde vergelijkingen die het op- en neergaan van populaties beschrijven die afhankelijk van elkaar zijn. Ze luiden als volgt:

prey'[t] = a prey[t] - b prey[t] pred[t]

pred'[t] = - c pred[t] + d pred[t] prey[t]

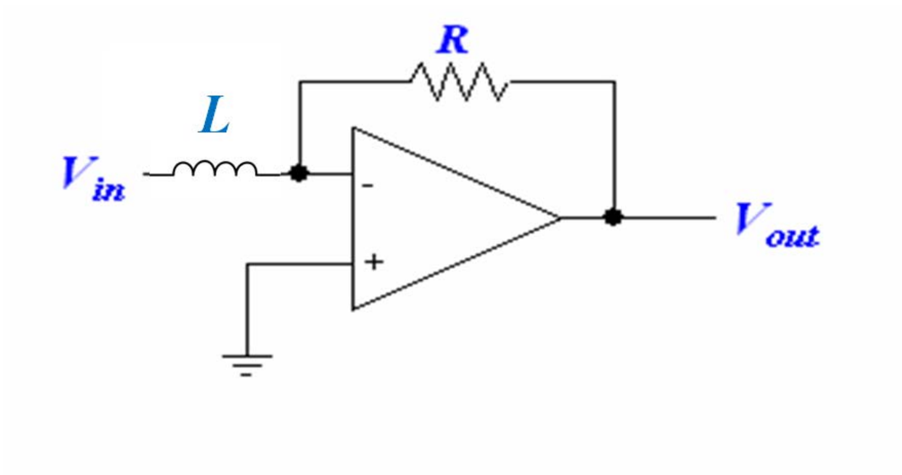
Hierin zijn a, b, c en d positieve constanten. Beschrijf in je eigen woorden nauwkeurig wat hier gebeurt, en waarom de formules de vorm hebben (afgeleiden, teken +/-, product) zoals hier gegeven.

Eerste vergelijking: Omdat er volop eten is voor de prooidieren zal het geboortecijfer (toename per tijdseenheid) van de prooidieren evenredig zijn met hun huidige aantal, en het sterftecijfer (door het minteken is dit de afname per tijdseenheid) is evenredig met zowel het huidige aantal prooidieren en het huidige aantal roofdieren.

Tweede vergelijking: Het sterftecijfer van de roofdieren is evenredig met het huidige aantal roofdieren, en het geboortecijfer van de roofdieren is evenredig met zowel het huidige aantal roofdieren, en de hoeveelheid aanwezig voedsel (de prooidieren).

3. **Operationele versterker**

a) Wat doet onderstaande configuratie met het ingangssignaal V_{in}?
L is een spoel, R is een weerstand.
NB: Leid hiervoor de formule af voor $V_{out}(t)$ als functie van $V_{in}(t)$.



De stroom i door de spoel is gelijk aan de stroom – i door de weerstand:

$$i = \frac{1}{L}\int_0^T V_{in}(t)\,dt = -\frac{V_{out}}{R}$$

b) Werkt deze configuratie als hoog-doorlaat filter, als laag-doorlaat filter, als bandfilter, of geen van deze?
NB: bereken de frequentie afhankelijkheid van dit filter.

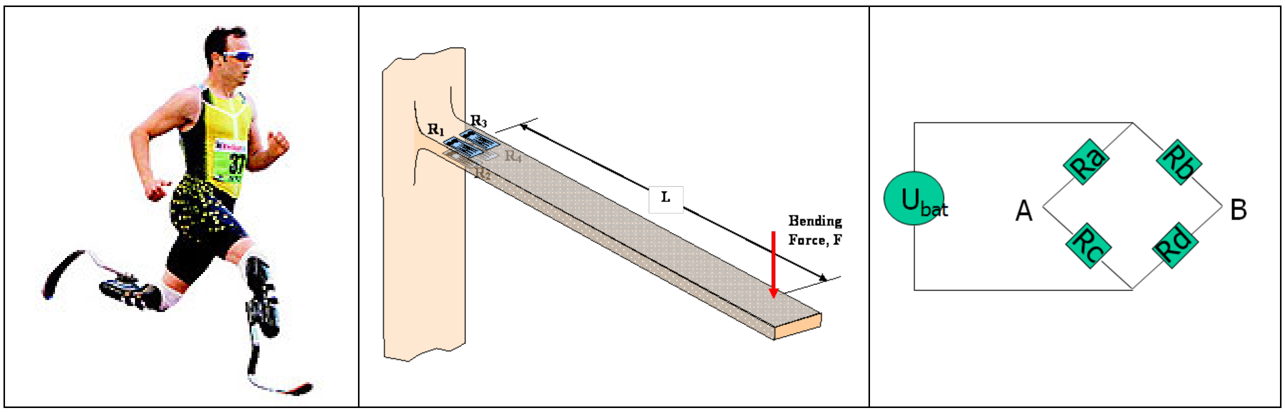
$$i = \frac{V_{in}}{j\omega L} = -\frac{V_{out}}{R} \rightarrow \frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{R}{j\omega L}$$

Voor hoge frequenties neemt de overdrachtsfunctie (versterking) af, dus dit is een laagdoorlaat filter.

4. Rekstrookjes

Met een artificieel been met een springveer voet kun je zelfs goed hardlopen. Zie onderstaande figuur. Om de veer van de voet optimaal aan te passen aan het gewicht van de loper, wordt de doorbuiging van de springveer met 4 identieke rekstrookjes gemeten, 2 bovenop (rekstrookje R_1 en rekstrookje R_3) en 2 onderop (rekstrookje R_2 en rekstrookje R_4) de veer gemonteerd. Ze worden in een Wheatstone brug opstelling geplaatst.

a) Wat is de positie van de vier rekstrookjes R_1 t/m R_4 in het Wheatstone brug schema, aangegeven met R_a t/m R_d , om zo gevoelig mogelijk te meten (welke zit waar)?



Rekstrookjes tabel:
R1 op plaats Ra,
R2 op plaats Rc,
R3 op plaats Rd,
R4 op plaats Rb.

Bij stilstand (en rechtop staan op beide springveer voeten) blijkt de hardloper wat op en neer te dansen, zijn massa is samen met de veer immers een massa-veer systeem. We willen met een model uitrekenen wat de stijfheid van de veer is, als we weten dat de renner 70 kg weegt, en hij met een frequentie van 1 maal per seconde op en neer beweegt.

Voor het model maken we gebruik van bovenstaande figuur (midden), waarbij de veer is voorgesteld als een doorbuigende staaf, en de volledige massa van de renner zich aan het eind bevindt. De massa van de staaf zelf is nul. De uitwijking uit de evenwichtsstand noemen we *u(t)*. De beginstand van het systeem op tijdstip t = 0 is 5 cm uitwijking, en we starten de beweging uit stilstand. Er is geen demping.

b) Stel de differentiaalvergelijking op van de stilstaande, maar op en neer bewegende renner op de springveer. De renner heeft massa *M* (in kilogram), de veer heeft een compliantie *k* (veerconstante, in Newton/meter).

De som van alle krachten op de massa is nul: $f_m + f_v = 0$.

De kracht door de traagheid van de massa is $f_m = m \cdot a = m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$.

De kracht van de veer is evenredig met de uitwijking: $f_v = k\,x$.

Dus de differentiaalvergelijking is: $m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + k\,x = 0$.

c) Wat is de compliantie van de veer?

We vullen in als oplossing: $y(t) = e^{\lambda t}$ *. De karakteristieke vergelijking wordt dan:* $M\lambda^2 + k = 0$*, met als oplossingen* $\lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{-mk}}{2m}$*. Dus* $\lambda_1 = -\frac{j\sqrt{k}}{\sqrt{m}}$*,* $\lambda_2 = \frac{j\sqrt{k}}{\sqrt{m}}$*.*

De oplossing wordt dan: $y(t) = A_1 e^{(-\frac{j\sqrt{k}}{\sqrt{m}})t} + A_2 e^{(\frac{j\sqrt{k}}{\sqrt{m}})t}$*. De complexe e-machten kunnen we schrijven als cosinus en sinus functies, en met de begincondities* $y(0) = 5$ *en* $y'(0) = 0$*:*

$y(t) = 5\cos(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}t)$.

De frequentie is 1x per seconde, dus $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}} = 2\pi$ *, dus als de massa m 70 kilo is, is de veerconstante* $k = 4\pi^2 m = 280\pi^2$*.*

d) Als we de trillingsfrequentie 100x zo hoog willen maken (100 x per seconde), om geen last meer te hebben van het ‘dansen’, hoeveel groter of kleiner moet dan de compliantie van de veer worden?

Als de frequentie 100x zo hoog wordt, moet k 100 x 100 = 10.000 keer zo groot worden.

e) De fabrikant die de veren maakt, moet ze aanpassen een het gewicht van de gebruiker. Wat moet de compliantie van de veer worden als de gebruiker 2x zo zwaar is, en de frequentie van het op-en-neer bewegen in stilstand hetzelfde blijft (1 x per seconde)?

Bij een 2x zo grote massa, moet ook de veerconstante 2x zo groot worden.