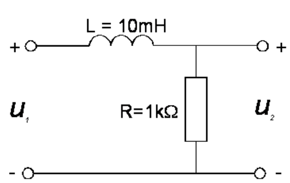
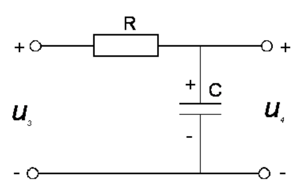
Tentamen Inleiding Meten en Modelleren
Vakcode 8C120
30 juni 2010, 9.00 - 12.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Indien u een opgave niet kunt maken, geeft u dan aan hoe u de opgave zou maken. Dat kan een deel van de punten opleveren. Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Bijlage: domeinentabel.
Veel succes!

1. Gegeven de netwerken met ideale, lineaire componenten in het figuur. Deze schema's zijn modellen voor resp. een trillingsstimulator (soort luidsprekertje) op de rug van blinden, en voor de lange leiding van een EEG apparaat naar de voorversterker.
   (a) Geef de uitdrukking voor de impedanties $Z(iw)$ voor spoel L en voor condensator C.
   (b) Geef deze impedanties in polaire vorm.
   (c) Bereken Z_L en Z_C (voor $L = 10$ mH, $C = 100$ nF) op de frequentie 1 kHz.
   (d) Op welke frequentie is $|Z_L|$ gelijk aan R? en $|Z_C|$?





Antwoord

(a) De gevraagde impedanties zijn:

$$Z_L = iwL,\ Z_C = \frac{1}{iwC} = -i\frac{1}{wC} \tag{1}$$

(b) De polaire vorm van een complex getal $z = \text{Re}z + i\ \text{Im}z$ wordt gegeven door:

$$z = |z|e^{i\varphi},\ |z| = \sqrt{(\text{Re}z)^2 + (\text{Im}z)^2},\ \tan\varphi = \frac{\text{Im}z}{\text{Re}z} \tag{2}$$

De modulus van Z_L is dus wL, de modulus van Z_C is $1/wC$. Het argument φ kunnen we bepalen aan de hand van:

$$e^{i\varphi_L} = \cos\varphi_L + i\sin\varphi_L = i \tag{3}$$

$$e^{i\varphi_C} = \cos\varphi_C + i\sin\varphi_C = -i \tag{4}$$

Zo zien wij dat $\varphi_L = \pi/2$, $\varphi_C = -\pi/2$. Dus:

$$Z_L = wLe^{i\frac{\pi}{2}},\ Z_C = \frac{1}{wC}e^{-i\frac{\pi}{2}} \tag{5}$$

(c) De hoekfrequentie is $w = 2\pi\nu = 2\pi 10^3$ rad/s. De impedanties zijn:

$$Z_L = i2\pi 10^3 * 10\ 10^{-3} = i20\pi\ \Omega \tag{6}$$

$$Z_C = -i\frac{1}{2\pi 10^3 * 10^2 10^{-9}} = -i\frac{5}{\pi}\ \text{k}\Omega \tag{7}$$

(d) De impedanties zijn gelijk bij:

$$|Z_L| = wL = w10\ 10^{-3} = R = 10^3 \tag{8}$$

$$w = 10^5\ \text{rad/s} = 2\pi\nu \tag{9}$$

$$\nu = \frac{10^2}{2\pi}\ \text{kHz} \tag{10}$$

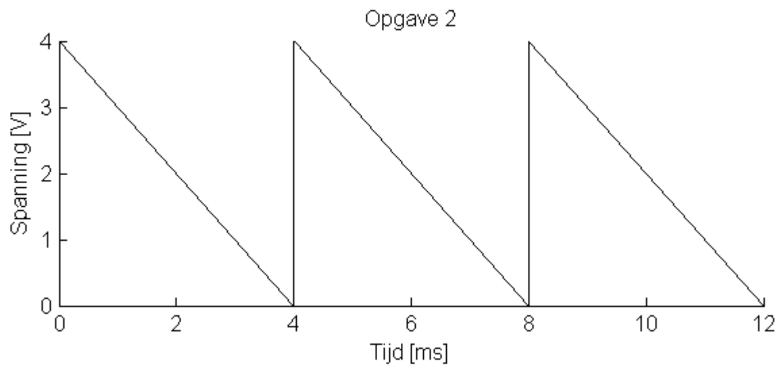
Voor de condensator hebben we:

$$|Z_C| = \frac{1}{wC} = \frac{1}{w10^2\ 10^{-9}} = \frac{10^7}{w} = R = 10^3 \tag{11}$$

$$w = 10^4\ \text{rad/s} = 2\pi\nu \tag{12}$$

$$\nu = \frac{5}{\pi}\ \text{kHz} \tag{13}$$

2. MRI scans kunnen op vele manieren worden gemaakt. Men varieert hierbij vaak het lokale magneetveld door met extra spoelen rond de patiënt het centrale magneetveeld te beïnvloeden met speciale pulsen. Hieronder staat het verloop van de spanning $u(t)$ voor zo'n speciale sequentie.



(a) Tot welke klasse behoort dit signaal?

(b) Geef met behulp van de grafiek de uitdrukking van $u(t)$ tussen $t = 0$ en $t = 4$ ms.

De spanning wordt op $t = 0$ over een zelfinductie van $L = 4$ mH aangelegd.

(c) Geef een uitdrukking voor het verloop van de stroom $i(t)$ door de spoel als functie van de tijd tussen $t = 0$ en $t = 4$ ms. Houd hierbij rekening met een initiële stroom $i(0)$. Het magneetveld is evenredig met de stroomsterkte, dus we willen uitendelijk weten hoe bij deze sequentie het magneetveld in de patiënt eruit ziet.

(d) Wat is de waarde van de stroom bij $t = 2$ ms?

(e) Geef de formule voor een sinusvormig signaal met dezelfde periode als $u(t)$.

Antwoord

(a) Het is een periodiek signaal.

(b) Het is een rechte lijn en wordt dus beschreven door $u(t) = at + b$. Bovendien weten we dat:

$$u(t = 0) = 4 = b, \quad u(t = 4) = 0 = 4(a + 1), \; a = -1 \tag{14}$$

Dus $u(t) = -t + 4$.

(c) In de domeinentabel vinden we de volgende relatie tussen stroom en spanning:

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{u(t)}{L} \tag{15}$$

De stroom wordt gegeven door:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int u(t)dt = \frac{1}{L}\int (4 - t)dt = \frac{1}{L}\left(4t - \frac{t^2}{2}\right) + C \tag{16}$$

C is een integratieconstante. Als wij rekening houden met een initiële stroom $i(0) = i_0$ hebben we $C = i_0$.

(d) Invullen van $t = 2 * 10^{-3}$ s bij de uitdrukking gevonden bij (c) geeft:

$$\begin{aligned} i(2\text{ ms}) &= \frac{1}{4 * 10^{-3}}(8 * 10^{-3} - 2 * 10^{-6}) + i_0 \\ &= 1.995 + i_0\ A \end{aligned} \tag{17}$$

Omdat de waarde van i_0 niet gegeven wordt kunnen we niets meer zeggen.

(e) $u(t)$ heeft een periode van $T = 4$ ms. De hoekfrequentie is:

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4 * 10^{-3}} = \frac{\pi}{2} * 10^3 \text{ rad/s} \tag{18}$$

Een algemene sinusvormige signaal met dezelfde periode als $u(t)$ wordt gegeven door:

$$u_{\sin}(t) = A\sin(\frac{\pi}{2} * 10^3 t + \phi) \tag{19}$$

Hierbij is A de amplitude en ϕ is de fase.

3. Bij een glucose tolerantie test wordt een glucose injectie gegeven. De glucoseconcentratie wordt daarna gemeten op verschillende tijdstippen om de respons van het glucose-insuline regulerend systeem te bestuderen. Na enige tijd zal de glucoseconcentratie weer afnemen. Bij diabetische patiënten zal dit langer duren. De glucoseconcentratie wordt bij een bepaald model gegeven door onderstaande vergelijking:

$$\frac{d^2g(t)}{dt^2} + (a+d)\frac{dg(t)}{dt} + (ad+bc)g(t) = 0 \tag{20}$$

Hierbij zijn a, b, c, d positieve constanten waarbij $a > d$.

(a) Bereken een algemene uitdrukking voor het verloop van de glucoseconcentratie $g(t)$ in het geval $(a+d)^2 = 4(ad+bc)$.

De insulineconcentratie $h(t)$ is afhankelijk van de glucoseconcentratie $g(t)$, als volgt:

$$h(t) = -\frac{1}{b}\left(\frac{dg(t)}{dt} + ag(t)\right) \tag{21}$$

De startwaarden zijn:

$$g(t=0) = g_0, \quad h(t=0) = 0 \tag{22}$$

Hierbij is g_0 de hoeveelheid glucose in de gegeven injectie.

(b) Wat is de startwaarde $\frac{dg}{dt}(t=0)$?

(c) Bepaal de oplossingsfunctie van (20) aan de hand van de startwaarden $g(t=0)$, $\frac{dg}{dt}(t=0)$.

(d) Hoe lang duurt het om de waarde $g(t) = 0$ te bereiken?

(e) Teken het verloop van de glucoseconcentratie als functie van de tijd.

Antwoord

(a) De karakteristieke vergelijking van deze differentiaalvergelijking heeft de vorm:

$$\lambda^2 + (a+d)\lambda + (ad+bc) = 0 \tag{23}$$

De oplossing hiervan is:

$$\lambda = \frac{-(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad+bc)}}{2} \tag{24}$$

In het geval $(a+d)^2 = 4(ad+bc)$ hebben we één oplossing van de karakteristieke vergelijking, namelijk

$$\lambda = -(a+d)/2 \tag{25}$$

De twee verschillende oplossingen van de differentiaalvergelijking zijn dan:

$$g_1(t) = e^{-\frac{(a+d)}{2}t}, \quad g_2(t) = te^{-\frac{(a+d)}{2}t} \tag{26}$$

De algemene oplossing is:

$$g(t) = e^{-\frac{(a+d)}{2}t}(A + Bt) \tag{27}$$

Hier zijn A, B constanten die bepaald kunnen worden aan de hand van startwaarden $g(0)$, $g'(0)$.

(b) Invullen van startwaarden (22) bij (21) geeft:

$$0 = -\frac{1}{b}\left(\frac{dg(0)}{dt} + ag_0\right) \tag{28}$$

We hebben dus:

$$\frac{dg(0)}{dt} = -ag_0 \tag{29}$$

(c) We willen de constanten A, B bepalen m.b.v. de startwaarden. We vullen $t = 0$ in bij de algemene uitdrukking voor $g(t)$ gevonden bij vraag (a). We vinden dat $g(0) = A = g_0$. Om de tweede startwaarde te gebruiken berekenen we de afgeleide van $g(t)$:

$$\frac{dg}{dt} = e^{-\frac{(a+d)}{2}t}\left[-\frac{(a+d)}{2}(A + Bt) + B\right] \tag{30}$$

Op $t = 0$:

$$\frac{dg(0)}{dt} = -ag_0 = -\frac{(a+d)}{2}A + B = -\frac{(a+d)}{2}g_0 + B \quad (31)$$

En dus $B = g_0(d-a)/2$. De gezochte oplossing is:

$$g(t) = g_0\, e^{-\frac{(a+d)}{2}t}\left(1 + \frac{(d-a)}{2}t\right) \quad (32)$$

(d) Invullen van $g = 0$ bij de oplossing gevonden bij (c) geeft:

$$1 = -\frac{1}{2}(d-a)t, \quad t = -\frac{2}{d-a} = \frac{2}{a-d} \;\; (a > d) \quad (33)$$

(e) Het is een afnemende exponentiële functie die de g-as snijdt op de waarde g_0 en de t-as op $t = 2/(a-d)$, gevonden bij vraag (d).

4. Uit het diktaat *Zenuwgeleiding* herhalen we de volgende tekst:

   The Hodgkin-Huxley model is defined by the following system of differential equations:

$$C_m \frac{dV}{dt} = -G_{\mathrm{Na}} m^3 h(V - V_{\mathrm{Na}}) - G_K n^4 (V - V_K) - G_L(V - V_L) + I_{\mathrm{app}} \tag{34}$$

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(1-m) - \beta_m m \tag{35}$$

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_h(1-h) - \beta_h h \tag{36}$$

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(1-n) - \beta_n n \tag{37}$$

   $C_m = 1.0\ \mu F/cm^2$ is the membrane capacitance and G_{Na}, G_K and G_L are conductances expressed in mS (milliSiemens) per cm^2 membrane surface (unit Siemens is defined by $S = \Omega^{-1}$).V_{Na}, V_K and V_L are adjusted equilibrium potentials for I_{Na}, I_K and I_L, respectively, and m, h and n are gating variables.

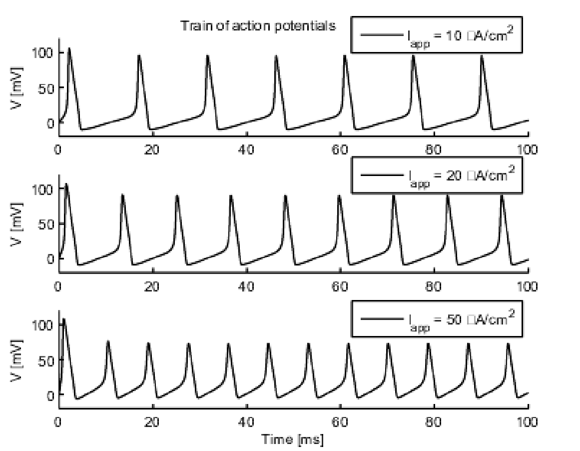
   (a) Beschrijf in je eigen woorden (1/4 tot max 1/2 A4) wat de elementen van formule (34) beschrijven, en wat de formules (35)-(37) beschrijven in deze beroemde vergelijkingen.

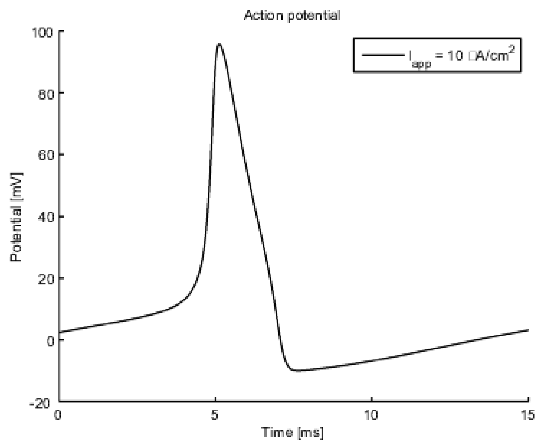
   (b) Waarom loopt een actiepotentiaal sneller over een gemyeliniseerde zenuwvezel? Beschrijf hoe dit werkt.

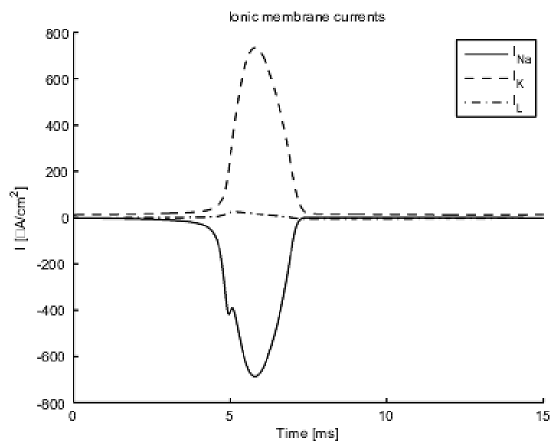
Antwoord

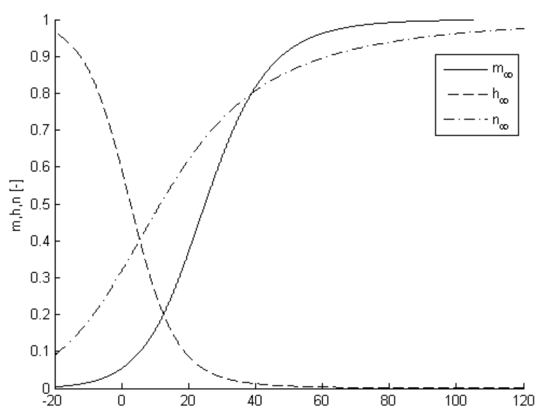
(a) De spanning V over het membraan van de zenuwvezel is tijdsafhankelijk. De gating variabelen, die de doorlaatbaarheid van het membraan voor diverse ionen beschrijven, zijn ook tijdsafhankelijk, omdat de openingen van de poorten in het membraan afhangen van de spanning over het membraan. Belangrijk is te constateren dat de α's en β's afhangen van de spanning over het membraan. De vier termen in de rechter lid van (34) zijn de stromen voor resp. de Natrium ionen, de Kalium ionen, de lekstroom en de stroom die extern door het membraan wordt opgelegd ($I_{\text{app}} - I_{\text{applied}}$). Hodgkin en Huxley hebben deze stromen gemeten aan een enorm axon van een inktvis. Formules (35)-(37) zijn experimenteel opgesteld aan de hand van deze metingen.

(b) De myeline (in de vorm van een om het axon gewikkelde Schwann cel) is een isolerend (wit) eiwit, dat een effectieve isolatiemantel vormt, echter met elke paar millimeter een *bloot* stukje membraan, de *knoop van Renvier*. De potentiaal *springt* van knoop naar knoop, en de snelheid van deze sprongsgewijze geleiding is vele malen sneller dan de geleidingssnelheid waarbij elk naburig stukje membraan wordt geëxciteerd op een niet-gemyeliniseerde vezel.




Action potential
Iapp = 10 □A/cm2
Potential [mV]
Time [ms]


Ionic membrane currents
INa
IK
IL
I [□A/cm2]
Time [ms]


m∞
h∞
n∞
m,h,n [-]
Potential [mV]