Tentamen Inleiding Meten en Modelleren
Vakcode 8C120
7 april 2010, 9.00 - 12.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Indien u een opgave niet kunt maken, geeft u dan aan hoe u de opgave zou maken. Dat kan een deel van de punten opleveren.

Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.

Bijlage: domeinentabel.

Veel succes!

1. Op een mooie zomerse dag heb je zin in een koel pilsje. Eerder op de dag heb je een paar flesjes bier in de koelkast gezet. Oorspronkelijk was het bier op kamertemperatuur (20°C), terwijl de temperatuur in de koelkast 4°C is. De inhoud van een flesje bier is 30 cl. Uit een tabellenboek weet je dat de warmtecapaciteit van bier (eigenlijk water) 4186 $\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$ bedraagt (let op: warmtecapaciteit per kg), terwijl de warmte-weerstand tussen een flesje bier en de koelkast 6 $\mathrm{K \cdot W^{-1}}$ bedraagt. Neem aan dat alle elementen lineair zijn, d.w.z. dat het temperatuurverloop door een eerste orde differentiaalvergelijking beschreven wordt.

   (a) Wat is de tijdconstante τ van het afkoelingsproces?

   (b) Geef een uitdrukking voor de temperatuur van het bier vanaf het moment dat het in de koelkast staat.

   (c) Wat is de temperatuur van het bier na een uur?

   (d) Teken het verloop van de temperatuur als functie van de tijd.

   (e) Wat is de waarde van de halveringstijd $t_{1/2}$?

   Na een uur is het bier nog niet koud genoeg. Daarom haal je een aantal flesjes uit het koelvak en leg je die in het vriesvak. De temperatuur in het vriesvak is −12°C.

   (f) Schets het vervolg van het temperatuurverloop vanaf het moment dat het bier in het vriesvak ligt.

(g) Hoe lang duurt het totdat het bier 5°C is vanaf het moment dat het bier in het vriesvak ligt?

Helaas. Je bent vergeten het bier uit het vriesvak te halen. Het bier is nog net niet bevroren (temperatuur 0°C), maar te koud om te drinken. Je gooit de flesjes in het zwembad (temperatuur 25°C) om ze op te warmen.

(h) Hoe lang duurt het tot het bier weer 5°C is als je weet dat de warmte-weerstand tussen een flesje bier en het zwembadwater 2 K $\cdot$ W^{-1} bedraagt?

Antwoord

(a) De soortelijke massa van bier (water) is 1000 kg $\cdot$ m^{-3}. De warmtecapaciteit C van één flesje bier is dus $0.30 \cdot 4186 = 1255.8$ J $\cdot$ K^{-1}. Met warmte-weerstand $R = 6$ K $\cdot$ W^{-1} en warmtecapaciteit $C = 1255.8$ J $\cdot$ K^{-1} is de tijdconstante $\tau = R \cdot C = 6 \cdot 1255.8 = 7535$ s.

(b) Een uitdrukking voor de temperatuur als functie van de tijd is $T(t) = A \cdot \exp(-t/\tau) + B$. Om A en B te vinden gebruiken we $T(0) = 293$ [K] $= A + B$ en $T(\infty) = 277$ [K] $= B$. Hieruit volgt $A = 293 - B = 293 - 277 = 16$ [K] en $B = 277$ [K].

(c) De temperatuur van het bier na een uur is gelijk aan $T(3600) = 286.9$ K $= 13.9$°C.

(d) Een aflopende e-macht die begint bij 293 K (of 20°C) en asymptotisch doorloopt naar 277 K (of 4°C), zie figuur.

(e) Voor de halveringstijd $t_{1/2}$ geldt: $\exp(-t_{1/2}/\tau) = 0.5$. Hieruit volgt $t_{1/2} = -\tau \cdot \ln(0.5) = -7535 \cdot -0.6931 = 5223$ s.

(f) Omdat het vriesvak (−12°C) kouder is dan de koelkast (4°C), zal de temperatuur sneller dalen. Het temperatuurverloop kan worden beschreven met $T_2(t) = (T(3600) - 261) \cdot \exp(-(t - 3600)/\tau) + 261$ (zie figuur).

(g) Om tijd t te bepalen waarop de temperatuur van het bier gelijk is aan 5°C, moeten we de vergelijking $T_2(t) = 278$ oplossen:

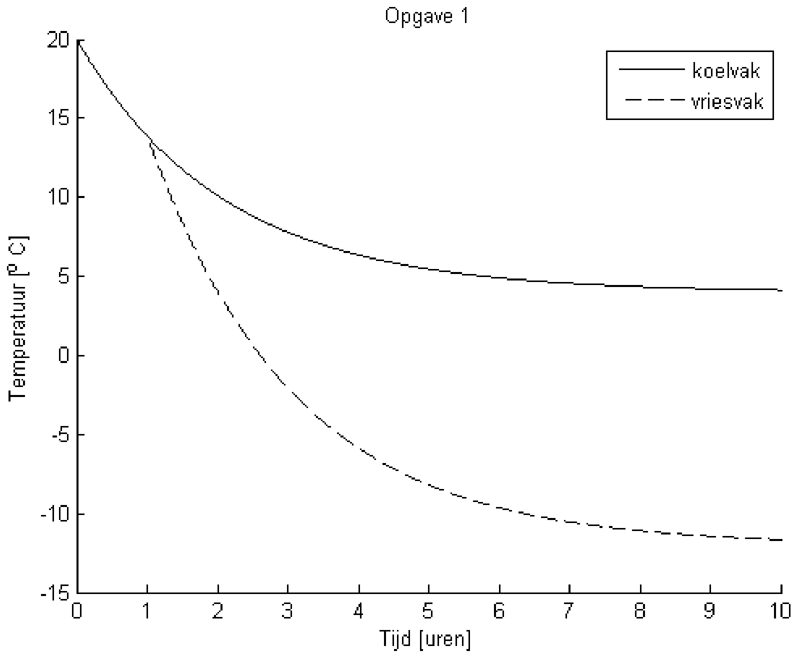
$$(T(3600) - 261) \cdot \exp(-(t - 3600)/\tau) + 261 = 278,$$
$$(T(3600) - 261) \cdot \exp(-(t - 3600)/\tau) = 17,$$

$$\exp(-(t-3600)/\tau) = 17/(T(3600)-261),$$
$$-(t-3600)/\tau = \ln(17/(T(3600)-261)),$$
$$t-3600 = -\ln(17/(T(3600)-261))\cdot\tau,$$
$$t = -\ln(17/(T(3600)-261))\cdot\tau + 3600 = 6779 \text{ s}.$$

Gevraagd werd hoe lang het duurt totdat het bier 5°C is vanaf het moment dat het bier in het vriesvak ligt. Het bier heeft dan al een uur in het koelvak gelegen. We moeten dus een uur (3600 s) van het antwoord aftrekken. Antwoord 3179 s, ofwel minder dan een uur.

(h) Omdat de warmte-weerstand een derde is van de oorspronkelijke warmte-weerstand is ook de tijdconstante τ_3 een derde van de oorspronkelijke τ. Het temperatuurverloop vanaf het moment dat het bier in het zwembad ligt kan dus worden beschreven met $T_3(t) = A_3 \cdot \exp(-t/\tau_3) + B_3$ met $\tau_3 = \tau/3 = 2512$ s. Om A_3 en B_3 te vinden gebruiken we $T_3(0) = 273$ [K] $= A_3 + B_3$ en $T_3(\infty) = 298$ [K] $= B_3$. Hieruit volgt $A_3 = 273 - B_3 = 273 - 298 = -25$ [K] en $B_3 = 298$ [K]. Om het antwoord te vinden moeten we de vergelijking $T_3(t) = 278$ oplossen:

$$-25\cdot\exp(-t/\tau_3) + 298 = 278,$$
$$-25\cdot\exp(-t/\tau_3) = -20,$$
$$\exp(-t/\tau_3) = 20/25,$$
$$-t/\tau_3 = \ln(20/25),$$
$$t = -\ln(0.8)\cdot\tau_3 = 0.2231\cdot 2512 = 560 \text{ s}.$$



2. Gegeven is een spanningssignaal $u_1(t) = 4\,\sin(10\pi t + \pi)$.

   (a) Teken deze sinus.

   (b) Wat is de amplitude, fase, frequentie, hoekfrequentie en periode van dit signaal? Geef steeds de juiste eenheiden aan.

   (c) Tot welke klasse behoort dit signaal?

   (d) Is dit signaal lineair? En als het signaal de vorm $u_1(t) = 10\,\pi t + \pi$ zou hebben? Motiveer jouw antwoord.

   De RMS waarde van een signaal $u(t)$ wordt gedefinieerd door:

$$u_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{\int_0^{\text{T}} u^2(t)\;dt}{\int_0^{\text{T}} dt}} \tag{1}$$

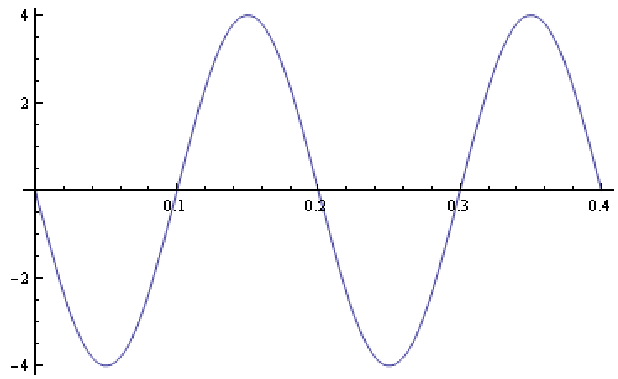
   (e) Bereken de RMS waarde van een algemene sinusvormige signaal
   $u(t) = A\,\sin(wt)$ (*Tip:* $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$).

   Beschouw een tweede spanningssignaal $u_2(t) = 2\,\sin(5\pi t)$.

(f) Wat zijn de RMS waarden van $u_1(t)$ en $u_2(t)$?

(g) Welk van de twee signalen is sterker? (*Tip: beschouw de verhouding van signalen in dB.*)

Antwoord



(a) Zie figuur.

(b) Algemene formule voor een sinus spanningssignaal:

$$u(t) = A\,\sin(\omega t + \varphi) \tag{2}$$

Het volgt dus: amplitude $A = 4$ V, fase $\varphi = \pi$ rad, hoekfrequentie $\omega = 10\pi$, frequentie $\nu = \omega/2\pi = 5$ Hz, periode $T = 1/\nu = 1/5 = 0,2$ s.

(c) Het is een periodiek signaal.

(d) Omdat $\sin(t + t') \neq \sin\,t + \sin\,t'$ is $u_1(t)$ niet lineair. Het signaal $u(t) = 10\;\pi t + \pi$ is ook niet lineair want:

$$u(t+t') = 10\pi(t+t')+\pi \neq u(t)+u(t') = 10\pi(t+t')+2\pi \tag{3}$$

(e) Voor de integraal boven -formule (1)- hebben we:

$$\int_0^{\mathrm{T}} u^2(t)\;dt = \int_0^{\mathrm{T}} A^2\,\sin^2(wt)\;dt = \frac{A^2}{2}\int_0^{\mathrm{T}} (1 - \cos(2wt))\;dt = \frac{A^2}{2}\left[t - \frac{1}{2w}\,\sin(2wt)\right]_0^{\mathrm{T}} = \frac{A^2}{2}T \tag{4}$$

Hier gebruiken we dat $\sin(2wT) = \sin(4\pi) = 0$. De tweede integraal is gewoon:

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt = [t]_0^{\mathrm{T}} = T \tag{5}$$

De gevraagde RMS waarde is dan $A/\sqrt{2}$ en het is onafhankelijk van de frequentie.

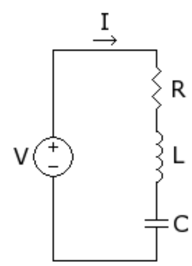
(f) $u_{1\ \mathrm{RMS}} = 2\sqrt{2},\ u_{2\ \mathrm{RMS}} = \sqrt{2}$.

(g) De verhoudingen van de gegeven signalen zijn:

$$20\ {}^{10}\!\log\frac{u_{1\ \mathrm{RMS}}}{u_{2\ \mathrm{RMS}}} = +6.02\ \mathrm{dB},\ 20\ {}^{10}\!\log\frac{u_{2\ \mathrm{RMS}}}{u_{1\ \mathrm{RMS}}} = -6.02\ \mathrm{dB} \tag{6}$$

Signaal u_1 is dus sterker.

3. Gegeven is een RLC serie schakeling met een spanningsbron als in onderstaande figuur. De spanning van de spanningsbron is constant.



Voor de stroom geldt de volgende tweede orde differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = 0 \tag{7}$$

(a) Bereken een uitdrukking voor het verloop van de stroom in het geval $RC = 4\frac{L}{R}$.

(b) Bereken een uitdrukking voor het verloop van de stroom in het geval $RC < 4\frac{L}{R}$. Gebruik de functies sinus en cosinus bij het geven van de oplossing.

Antwoord

De karakteristieke vergelijking van deze differentiaalvergelijking heeft de vorm:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \tag{8}$$

De oplossing hiervan is:

$$\lambda = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{(\frac{R}{L})^2 - \frac{4}{LC}}}{2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{(RC)^2 - 4LC}{(LC)^2}}}{2} \tag{9}$$

(a) In het geval $RC = 4L/R$ hebben we één oplossing van de karakteristieke vergelijking, namelijk $\lambda = -R/2L$. De twee verschillende oplossingen van de differentiaalvergelijking zijn dan:

$$i_1(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}, \;\; i_2(t) = te^{-\frac{R}{2L}t} \tag{10}$$

De algemene oplossing is:

$$i(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t} + Bte^{-\frac{R}{2L}t} \tag{11}$$

Hier zijn A, B constanten die bepaald kunnen worden aan de hand van startwaarden $i(0)$, $i'(0)$.

(b) In dit geval hebben we dat

$$(RC)^2 - 4LC = -\alpha \tag{12}$$

waar $\alpha > 0$. De twee wortels van de karakteristieke vergelijking zijn:

$$\lambda_1 = -\frac{R}{2L} + i\frac{\sqrt{\alpha}}{2LC}, \;\; \lambda_2 = -\left(\frac{R}{2L} + i\frac{\sqrt{\alpha}}{2LC}\right) \tag{13}$$

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is dan:

$$i(t) = A_1 e^{\left(-\frac{R}{2L} + i\frac{\sqrt{\alpha}}{2LC}\right)t} + A_2 e^{-\left(\frac{R}{2L} + i\frac{\sqrt{\alpha}}{2LC}\right)t} \tag{14}$$

Deze oplossing kan ook, m.b.v. de relatie $e^{it} = \cos t + i \sin t$, in de volgende vorm gegeven worden:

$$i(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}(C_1 \cos(\sqrt{\alpha}/2LC)t + C_2 \sin(\sqrt{\alpha}/2LC)t) \tag{15}$$

De relatie tussen de constanten is:

$$A_1 = \frac{1}{2}(C_1 - iC_2), \;\; A_2 = \frac{1}{2}(C_1 + iC_2) \tag{16}$$

Deze kunnen weer bepaald worden aan de hand van staartwaarden.

4. Beschrijf in deze vragen kort wat de kern is van onderstaande begrippen. Formules zijn niet nodig (mag wel). Maak eventueel een tekening of illustratie van het proces dat je beschrijft.

   (a) Wat is de Nernst potentiaal?

   (b) Wat beschrijven de Hodgkin and Huxley vergelijkingen?

   (c) Beschrijf kort wat de elektrische/fysiologische oorsprong is van elk van de pieken (P-Q-R-S-T) in het PQRST ECG complex.

   Antwoord
   Het antwoord op dit opgave is te vinden in de cursus materiaal (zie hiervoor de cursus website).