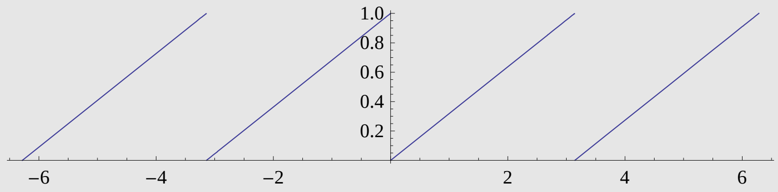
Begeleide zelfstudie 8C120 - BZ02

Oefening 1: Fourier reeks van de zaagtand functie

a. bereken **met de hand (op papier)** de Fourier coefficienten van de volgende oneindig periodieke zaagtand functie (een periode loopt van -π tot π, de grafiek laat de functie van -2π tot 2π zien):

```
Plot[x/π - Floor[x/π], {x, -2 π, 2 π}, AspectRatio → .2]
```



b. doe dezelfde berekening, gebruik makend van de rekenkundige mogelijkheden van *Mathematica*, om de Fourier coefficienten van de zelfde zaagtand functie te berekenen. Er moet uiteraard hetzelfde uitkomen ...

c. Gebruik de functie Manipulate om interactief een gereconstrueerde grafiek van de zaagtand functie te laten zien met de hierboven gevonden Fourier coefficienten, waarbij je meer en meer coefficienten meeneemt in de serie (bijv. van 1 tot 50).

Oplossing

a. Met de hand:

De functie ‘Floor’ is wat lastig (deze rond naar beneden af tot een integer), beter is het om de functie in twee helften te splitsen en te beschrijven met ‘normale’ functies. De linker helft van de periode [-π,π] wordt dan beschreven met de functie $f[x] = \frac{x}{\pi} + 1$, de rechter helft met de functie $f[x] = \frac{x}{\pi}$. Voor het gemiddelde krijgen we dan (de integraal bestaat dus uit de som van twee delen, het stuk $-\pi \leq x \leq 0$, en het stuk $0 < x \leq \pi$):

$$\text{a0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{x}{\pi}+1\right)dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x}{\pi}\,dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{x}{\pi}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}1\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x}{\pi}\,dx =$$

$$\frac{-1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x}{\pi}\,dx + \frac{1}{2\pi}\pi + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x}{\pi}\,dx = \frac{1}{2}.$$

Voor a_n geldt:

$$\text{an} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\text{Cos}[n\,x]\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x}{\pi}\,\text{Cos}[n\,x]\,dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{x}{\pi}\,\text{Cos}[n\,x]\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\text{Cos}[n\,x]\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x}{\pi}\,\text{Cos}[n\,x]\,dx =$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x}{\pi}\,\text{Cos}[n\,x]\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\text{Cos}[n\,x]\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x}{\pi}\,\text{Cos}[n\,x]\,dx$$

De eerste en laatste term vallen tegen elkaar weg:

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \mathrm{Cos}[n\,x]\, dx = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n} \mathrm{Sin}[n\,x] \Big|_{-\pi}^{0} = \frac{\mathrm{Sin}[n\,\pi]}{n\,\pi}$$

Dit is nul voor elke integer n. Dus $a_n = 0$.
Dat hadden we ook direct kunnen zien, want de functie is oneven: er zijn geen cosinus Fourier coefficienten.

En voor de sinus coefficienten:

$$\mathrm{bl} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \left(\frac{x}{\pi} + 1\right) \mathrm{Sin}[l\,x]\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{x}{\pi} \mathrm{Sin}[l\,x]\, dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \frac{x}{\pi} \mathrm{Sin}[l\,x]\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \mathrm{Sin}[l\,x]\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{x}{\pi} \mathrm{Sin}[l\,x]\, dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{x}{\pi} \mathrm{Sin}[l\,x]\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \mathrm{Sin}[l\,x]\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{x}{\pi} \mathrm{Sin}[l\,x]\, dx =$$

$$\frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{x}{\pi} \mathrm{Sin}[l\,x]\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \mathrm{Sin}[l\,x]\, dx =$$

$$\frac{2}{\pi^2} \int_{0}^{\pi} x\, \mathrm{Sin}[l\,x]\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \mathrm{Sin}[l\,x]\, dx =$$

De eerste term schrijven we anders met behulp van *partiele integratie*:

$$\frac{2}{\pi^2} \left(\frac{-x}{l} \mathrm{Cos}[l\,x] \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{l} \int_{0}^{\pi} \mathrm{Cos}[l\,x]\, dx\right) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \mathrm{Sin}[l\,x]\, dx =$$

$$\frac{2}{\pi^2} \left(\frac{-\pi}{l} \mathrm{Cos}[l\,\pi]\right) + \frac{1}{l^2} \mathrm{Sin}[l\,\pi] + \frac{1}{\pi} \frac{1}{l} \mathrm{Cos}[l\,x] \Big|_{-\pi}^{0} =$$

$$\frac{2\,(-l\,\pi\, \mathrm{Cos}[l\,\pi] + \mathrm{Sin}[l\,\pi])}{l^2\,\pi^2} + \left(\frac{-1 + \mathrm{Cos}[l\,\pi]}{l\,\pi}\right) =$$

$$= -\frac{l\,\pi + l\,\pi\, \mathrm{Cos}[l\,\pi] - 2\, \mathrm{Sin}[l\,\pi]}{l^2\,\pi^2}$$

$$\mathrm{Simplify}\left[-\frac{l\,\pi + l\,\pi\, \mathrm{Cos}[l\,\pi] - 2\, \mathrm{Sin}[l\,\pi]}{l^2\,\pi^2},\ l \in \mathrm{Integers}\right]$$

$$-\frac{1 + (-1)^l}{l\,\pi}$$

b. Met *Mathematica* 8:
Pas de formules toe van het diktaat om de Fourier reeks coefficienten te berekenen. Het gemiddelde a_0 wordt berekend als:

$$\mathrm{a0} = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x}{\pi} - \mathrm{Floor}\left[\frac{x}{\pi}\right]\right) dx$$

$$\frac{1}{2}$$

Ofwel, met de functie anders geschreven:

$$a0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{x}{\pi}+1\right)dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x}{\pi}\,dx$$

$$\frac{1}{2}$$

Er komt natuurlijk hetzelfde uit.

Voor de cosinus coefficienten volgt:

$$an = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\text{Cos}[n\,x]\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x}{\pi}\,\text{Cos}[n\,x]\,dx$$

$$\frac{1-\text{Cos}[n\,\pi]}{n^2\,\pi^2} + \frac{-1+\text{Cos}[n\,\pi]+n\,\pi\,\text{Sin}[n\,\pi]}{n^2\,\pi^2}$$

Dit kan worden vereenvoudigd:

```
an // Simplify
```

$$\frac{\text{Sin}[n\,\pi]}{n\,\pi}$$

Deze functie is altijd 0! Voor elke integer n. Je kon dit natuurlijk al zien aan de antisymmetrische grafiek van de functie. Er zijn geen cosinus termen, alleen sinus termen. We berekenen deze laatste als volgt:

$$bl = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\text{Sin}[l\,x]\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x}{\pi}\,\text{Sin}[l\,x]\,dx \;//\; \text{Simplify}$$

$$-\frac{l\,\pi+l\,\pi\,\text{Cos}[l\,\pi]-2\,\text{Sin}[l\,\pi]}{l^2\,\pi^2}$$

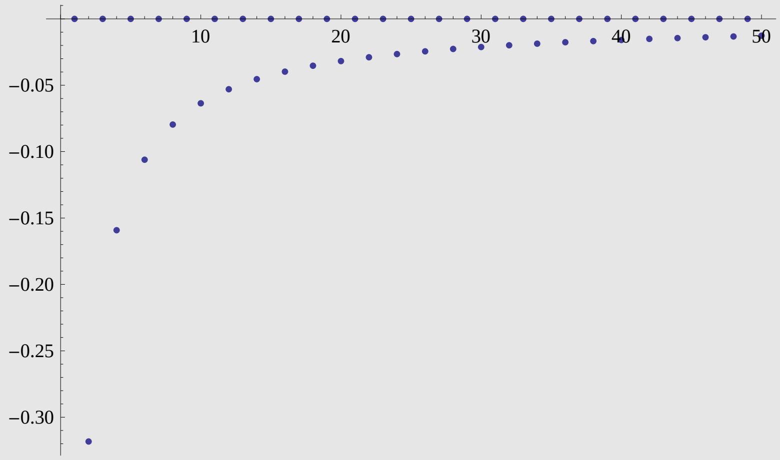
We maken een lijst (met Table) van de eerste 10 coëfficienten:

```
Table[bl, {l, 1, 10}]
```

$$\left\{0, -\frac{1}{\pi}, 0, -\frac{1}{2\,\pi}, 0, -\frac{1}{3\,\pi}, 0, -\frac{1}{4\,\pi}, 0, -\frac{1}{5\,\pi}\right\}$$

En we plotten deze lijst (voor 50 coefficienten) in een grafiek, het *spectrum*:

```
ListPlot[Table[bl, {l, 1, 50}], PlotRange → All]
```



De even frequenties zijn allemaal negatief (ofwel: met 180 graden fase verschuiving), de oneven frequenties zijn allemaal nul.

c. De interactive visualizatie met incrementele opbouw van de functie met steeds meer coefficienten doen we als volgt: we definieren eerst de functie die we willen plotten:

$$\text{zaagtand}[x\_,\ m\_] := \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{m} -\frac{l\,\pi + l\,\pi\,\text{Cos}[l\,\pi] - 2\,\text{Sin}[l\,\pi]}{l^2\,\pi^2}\ \text{Sin}[l\,x]$$

Test:

```
zaagtand[x, 10]
```

$$\frac{1}{2} - \frac{\text{Sin}[2\,x]}{\pi} - \frac{\text{Sin}[4\,x]}{2\,\pi} - \frac{\text{Sin}[6\,x]}{3\,\pi} - \frac{\text{Sin}[8\,x]}{4\,\pi} - \frac{\text{Sin}[10\,x]}{5\,\pi}$$

En dit is de Manipulate (let erop dat de aantallen coefficienten *m* alleen integer kunnen zijn, d.w.z. toename van *m* met een stapgrootte van 1):

```
Manipulate[Plot[zaagtand[x, m], {x, 0, 4 π}], {m, 1, 50, 1}]
```