Opgaven Begeleide Zelfstudie 8C120 BZ 02

Opgave 1

Bereken de Fourierreeks van de volgende functies. Teken van elk van die functies een grafiekje.

a. $f(x) = \left(\frac{x}{\pi}\right)^2$ voor $-\pi \le x \le \pi$, verder met periode 2π voortgezet.

b. $g(x) = \frac{x}{\pi}$ voor $-\pi < x < \pi$, $g(-\pi) = g(\pi) = 0$, verder met periode 2π voortgezet.

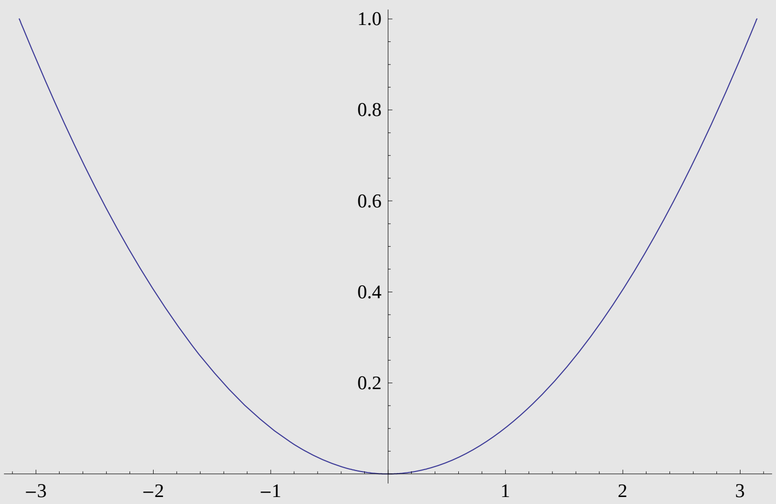
c. $h(x) = 0$ als $-\pi < x \le 0$,

$h(x) = \frac{x}{\pi}$ als $0 \le x < \pi$,

$h(-\pi) = h(\pi) = \frac{1}{2}$, verder met periode 2π voortgezet.

Antwoord a):

```
Plot[x^2/π^2, {x, -π, π}]
```



Het gemiddelde a_0 is:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{\pi^2}\,dx$$

$$\frac{1}{3}$$

Er zijn geen sinus termen, want het is een even functie (symmetrisch om de y-as). We berekenen de cosinus termen a_k als volgt:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{\pi^2} \text{Cos}[k\, x]\, dx$$

$$\frac{4\, k\, \pi\, \text{Cos}[k\, \pi] + 2\left(-2 + k^2\, \pi^2\right) \text{Sin}[k\, \pi]}{k^3\, \pi^3}$$

Dit kunnen we vereenvoudigen, omdat we weten dat *k* alleen integer waarden kan aannemen:

$$\text{Simplify}[a_k,\ k \in \text{Integers}]$$

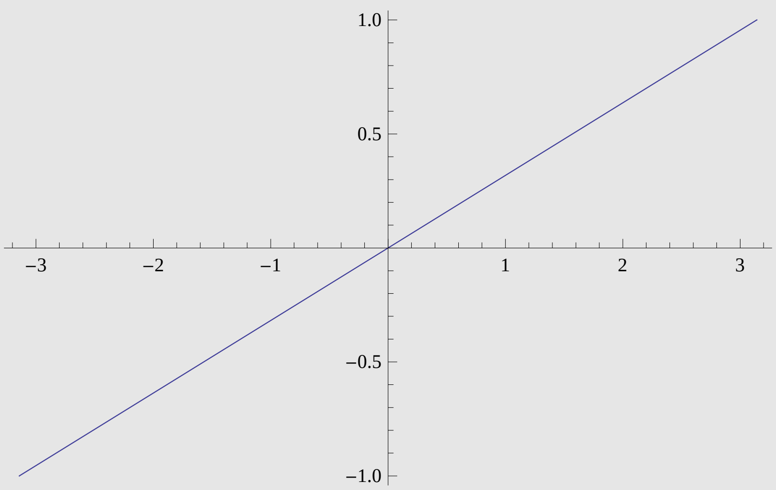
$$\frac{4\, (-1)^k}{k^2\, \pi^2}$$

Het antwoord is dus de volgende Fourier reeks:

$$\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\,(-1)^k}{k^2\,\pi^2} \cos k\, x$$

Antwoord b):

$$\text{Plot}\left[\frac{x}{\pi},\ \{x, -\pi, \pi\}\right]$$



Het gemiddelde is nul:

$$a_0 = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{\pi}\, dx$$

0

Ook de cosinus coefficienten zijn nul, want het is een oneven functie:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{\pi} \text{Cos}[k\, x]\, dx$$

0

De sinus coefficienten:

$$b_l = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{\pi} \text{Sin}[l\, x]\, dx$$

$$\frac{-2\, l\, \pi\, \text{Cos}[l\, \pi] + 2\, \text{Sin}[l\, \pi]}{l^2\, \pi^2}$$

Dit kan worden vereenvoudigd door:

```
Simplify[bl, l ∈ Integers]
```

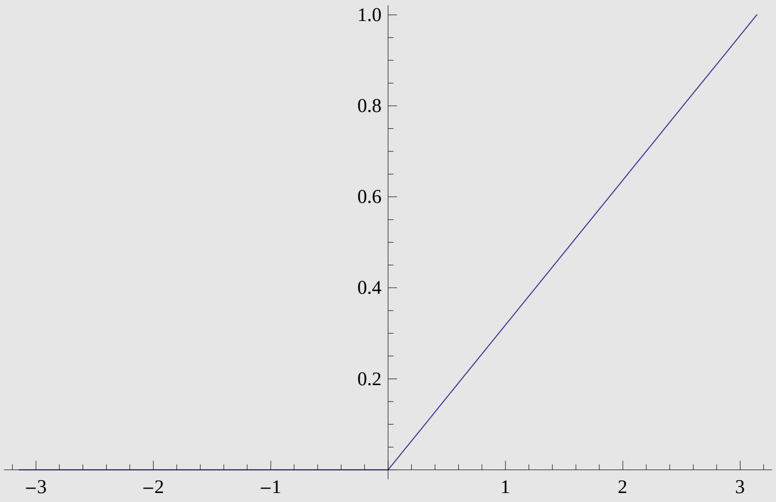
$$-\frac{2\, (-1)^l}{l\, \pi}$$

Het antwoord is dus de Fourier reeks: $\sum_{l=1}^{\infty} -\frac{2\,(-1)^l}{l\,\pi} \sin l\, x$

Antwoord c):

$$f[x\_] := \text{Piecewise}\left[\left\{\{0,\ x \le 0\},\ \left\{\frac{x}{\pi},\ x > 0\right\}\right\}\right];$$

```
Plot[f[x], {x, -π, π}]
```



Het gemiddelde a_0 over een periode van $-\pi$ tot $+\pi$:

```
a0 = 1/(2 π) ∫_{-π}^{π} f[x] ⅆx
```

$$\frac{1}{4}$$

De functie is niet even en niet oneven, dus we moeten zowel de cosinus termen a_k uitrekenen, als de sinus termen b_l.

```
ak = Simplify[1/π ∫_{-π}^{π} f[x] Cos[k x] ⅆx, k ∈ Integers]
```

$$\frac{-1+(-1)^k}{k^2 \pi^2}$$

```
bl = Simplify[1/π ∫_{-π}^{π} f[x] Sin[l x] ⅆx, l ∈ Integers]
```

$$-\frac{(-1)^l}{l \pi}$$

Het antwoord is dus de Fourier reeks: $\frac{1}{4} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{(2m+1)^2 \pi^2} \cos(2m+1)x + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+2}}{l \pi} \sin l x$

Opgave 2

Wat is de Fourier reeks van de volgende functies?

a. $f(x) = 1$ voor alle x.

b. cos ω x

c. De Deltafunctie, $\delta(x)$, verder met periode 2π voortgezet.
Deze functie is alleen gedefineerd voor $x = 0 + k\,2\pi$, en heeft daar de waarde ∞. De oppervlakte onder deze functie over één periode is 1.

Antwoord a):

Het gemiddelde a_0 is natuurlijk 1. Er zijn geen varierende cosinus of sinus componenten, dus $a_k = b_l$ voor alle k en alle l.

Antwoord b):

Het gemiddelde van een cosinus functie is nul. Er is maar één cosinus term, nl. voor $k = 1$, dus alleen a_1=1. Alle *andere* a_k coefficienten en alle b_l coefficienten zijn nul.

Antwoord c):

Het gemiddelde a_0 is 1:

```
a0 = ∫_{-π}^{π} DiracDelta[x] ⅆx
```

```
1
```

Alle cosinus coefficienten a_k blijken 1 te zijn:

```
ak = ∫_{-π}^{π} DiracDelta[x] Cos[k x] ⅆx
```

```
1
```

En alle sinus coefficienten b_l blijken 0 te zijn:

```
bl = ∫_{-π}^{π} DiracDelta[x] Sin[k x] ⅆx
```

```
0
```

We noemen dit een *wit* spectrum. Alle frequenties zitten er in, met amplitude 1.

Opgave 3

Men noemt een functie f even als $f(-x) = f(x)$ voor alle x, en oneven als $f(-x) = -f(x)$ voor alle x. Bewijs voor aangepaste functies de volgende beweringen:

a. Als f even is, dan is de Fourierreeks van f een cosinusreeks, d.w.z. $b_l = 0$ voor alle $l \geq 0$, dus $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\, x$.

Antwoord a):

De functie f is even, dus $f(-x) = f(x)$. Voor de algemene Fourier reeks kunnen we schrijven:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\, x \; + \sum_{l=1}^{\infty} b_l \sin l\, x$$

en $$f(-x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\, x \; - \sum_{l=1}^{\infty} b_l \sin l\, x$$

Als we deze twee vergelijkingen bij elkaar optellen, krijgen we:

$$2\, f(x) = 2\, a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\, x$$

waaruit de bewering volgt/

b. Als f oneven is, dan is de Fourierreeks van f een sinusreeks, d.w.z. $a_k = 0$ voor alle $k \geq 0$, dus $f(x) = a_0 + \sum_{l=1}^{\infty} b_l \sin l\, x$.

Antwoord b):

Het antwoord wordt met dezelfde strategie verkregen als hierboven. Gebruik nu $f(-x) = -f(x)$.