Begeleide zelfstudie 8C120 - BZ03

1. Metingen

a. Noem een reeks metingen die uitgevoerd kunnen worden op:
   i) een intensive care neonatologie (couveuses)
   ii) een intensive care hartbewaking

b) Geef bij elk van deze metingen aan:
   i) welke fysische parameter wordt gemeten
   ii) wat hiervan de SI eenheid is
   iii) wat de domein omzetting is van de transducer (bijv. optisch → elektrisch)

▫ **antwoord a) en b):**

- EEG electro-encefalogram - elektrische spanning - Volt - <elektrisch - elektrisch>
- temperatuur - warmte - graden Kelvin - <warmte - elektriciteit>
- bloeddruk - druk - Newton per vierkante meter - <druk - elektriciteit>
- frequentie van de hartslag - gemeten uit het ECG - Hz (perioden per seconde) - <elektrisch - tijd>
- ECG electro-cardiogram - elektrische spanning - Volt - <elktriciteit - elktriciteit>
- CO_2 gehalte van de uitgeademde lucht - pH met CO_2 sensor - concentratie mMol/liter - <pH - elektriciteit>

2. Complexe getallen

a) Gebruik de formule van Euler om $\cos(x)$ uit te drukken in e-machten. Doe hetzelfde voor $\sin(x)$.

b) Schrijf de volgende getallen in de vorm $a + i\,b$. Je hebt **geen** rekenmachine of computer nodig.

i) $\frac{i+2}{6-4\,i}$

ii) $\frac{1+3\,i}{4\,i}$

iii) $\left(\frac{i}{2\,i+1}\right)^2$

iv) $e^{\ln(4)+\frac{i\pi}{4}}$

v) $\cos(\pi + i)$

vi) $\sin(2\,\pi - 3\,i)$

▪ **Antwoorden**

a) De formule van Euler luidt: $e^{i\,\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$. Vervangen van ϕ door $-\phi$ levert: $e^{-i\,\phi} = \cos(-\phi) + i\sin(-\phi) = \cos(\phi) - i\sin(\phi)$. Optellen van deze twee vergelijkingen resulteert in: $e^{i\,\phi} + e^{-i\,\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi) + \cos(\phi) - i\sin(\phi) = 2\cos(\phi)$. Dus $\cos(\phi) = \frac{e^{i\,\phi}+e^{-i\,\phi}}{2}$. Door aftrekken van de vergelijkingen krijg je een uitdrukking voor de sinus: $\sin(\phi) = \frac{e^{i\,\phi}-e^{-i\,\phi}}{2\,i}$.

b)

i) Vermenigvuldig teller en noemer met de complex geconjugeerde van de noemer om de complexe eenheid weg te werken: $\frac{i+2}{6-4\,i} = \frac{i+2}{6-4\,i} \cdot \frac{6+4\,i}{6+4\,i} = \frac{12+14\,i-4}{36+16} = \frac{8+14\,i}{52} = \frac{2}{13} + \frac{7}{26}\,i$

ii) Op dezelfde manier: $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\,i$

iii) $\left(\frac{i}{2\,i+1}\right)^2 = \frac{-1}{-3+4\,i} \cdot \frac{-3-4\,i}{-3-4\,i} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}\,i$

iv) $e^{\ln(4)+\frac{i\pi}{4}} = e^{\ln(4)}\, e^{\frac{i\pi}{4}} = 4\,(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}}\,i$

v) Gebruik de in onderdeel a afgeleide uitdrukking voor de cosinus en gebruik $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$: $\cos(\pi + i) = \frac{e^{i(\pi+i)}+e^{-i(\pi+i)}}{2} = \frac{e^{i\pi-1}+e^{-i\pi+1}}{2} = \frac{e^{-1}\,e^{i\pi}+e^{1}\,e^{-i\pi}}{2} = -\frac{1+e^2}{2\,e}$

vi) Gebruik de in onderdeel a afgeleide uitdrukking van de sinus: $\sin(2\pi - 3\,i) = -\frac{i\left(-1+e^6\right)}{2\,e^3}$

3. Complexe impedantie

De lading $Q(t)$ (in Coulomb) in een condensator met capaciteit C (in Farad) waarover een spanning $U(t)$ (in Volt) staat bedraagt $Q(t) = C \cdot U(t)$. 1 Ampère (de eenheid van stroom) staat gelijk aan 1 Coulomb per seconde.*

** In feite is de Coulomb gedefinieerd aan de hand van de Ampère: $1\,C = 1\,A \cdot s$.*

a) Leid hieruit een uitdrukking af voor de stroom $I(t)$ door een condensator met (constante) capaciteit C en (tijdafhankelijke) spanning $U(t)$.

De impedantie van een element is gedefinieerd als: $Z = \frac{U}{I}$.

b) Bepaal de (complexe) impedantie van een condensator met capaciteit C als de spanning een peiodiek signaal is volgens $U(t) = e^{i\,\omega\,t}$.

De relatie tussen spanning $U(t)$ en stroom $I(t)$ in een spoel met zelfinductie L (in Henry) wordt gegeven door $U(t) = L\,\frac{dI(t)}{dt}$.

c) Bepaal de (complexe) impedantie van deze spoel als de stroom $I(t) = e^{i\,\omega\,t}$.

Antwoorden

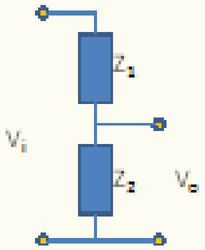
a) De stroom door een condensator is de *verandering* van de lading Q per seconde, die door de consensator sproomt, en is evenredig met de afgeleide van de spanning erover: $I(t) = \frac{d\,Q(t)}{d\,t} = C\,\frac{dU(t)}{dt}$. De condensator heeft dus een *frequentie-afhankelijke* impedantie: de geleiding van de stroom erdoor hangt af van de frequentie. Hoe hoger de frequentie, hoe beter een condensator de stroom doorlaat.

b) Als de spanning $U(t) = e^{i\,\omega\,t}$, dan is een uitdrukking voor de stroom: $I(t) = C\,\frac{dU(t)}{dt} = i\,\omega\,C\,e^{i\,\omega\,t}$. De impedantie van de condensator is dan direct uit te rekenen: $Z = \frac{U}{I} = \frac{e^{i\,\omega\,t}}{i\,\omega\,C\,e^{i\,\omega\,t}} = \frac{1}{i\,\omega\,C}$.

c) De spanning over de spoel is $U(t) = L\,\frac{dI(t)}{dt}$. Invullen van $I(t) = e^{i\,\omega\,t}$ levert: $U(t) = L\,i\,\omega\,e^{i\,\omega\,t}$. Voor de impedantie van een spoel is dan te berekenen: $Z = \frac{U}{I} = \frac{L\,i\,\omega\,e^{i\,\omega\,t}}{e^{i\,\omega\,t}} = L\,i\,\omega$. Ook de impedantie van een spoel is dus frequentie-afhankelijk, maar nu geldt: hoe hoger de frequenctie, hoe hoger de impedantie en dus hoe moeilijker de spoel stroom doorlaat.

4. Circuits

Spanningsdeler

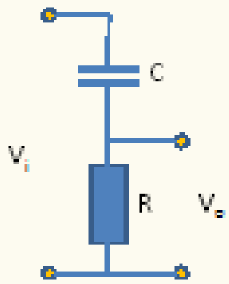


Bovenstaand circuit is een spanningsdeler. De ingangsspanning op de linker aansluitingen is V_i. Gegeven de twee weerstanden Z_1 en Z_2, bereken de output spanning V_o.

Antwoord

$V_0 = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} V_1$. Stel je voor dat de beide weerstanden gelijk zijn, dan krijg je de helft van de ingangsspanning. Bij een andere verhouding krijg je een ander gedeelte, vandaar ‘deler’.

CR circuit



a) Bereken van bovenstaand circuit de overdrachtfunctie (transfer function) $H = \frac{V_o}{V_i}$.

$H = \frac{R}{R+Z_C}$.

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R+Z_C}}$$

```
Clear[r];
H = r / (r + 1/(I ω c)) // Simplify
```

$$\frac{r\,\omega}{-i + r\,\omega}$$

b) Bereken ook de grootte van H: $|H|$.

De grootte d van een complex getal $z = a + i\,b$ is: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Pythagoras, denk aan de ligging van het punt $\{a, b\}$ in het complexe vlak. Vaak wordt de grootte ook uitgerekend als $d = \sqrt{z\,z^*}$. Hierin is z^*

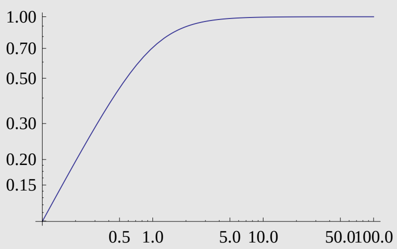
de complex geconjugeerde, $z^* = a - i\, b$. Reken zelf uit dat $\sqrt{z\, z^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$. We gebruiken $\sqrt{z\, z^*}$ hieronder.

Als het getal is gegeven als $z = d\, e^{i\,\phi}$, dan is de grootte uitrekenen makkelijk: de grootte is dan gewoon d.

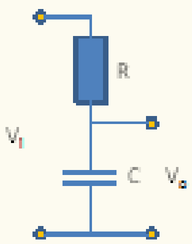
```
Clear[r, c];
Habs = Sqrt[r/(r + 1/(I ω c)) r/(r + 1/(-I ω c))] // Simplify
```

$$\sqrt{\frac{c^2\, r^2\, \omega^2}{1 + c^2\, r^2\, \omega^2}}$$

```
r = c = 1; LogLogPlot[Sqrt[(c^2 r^2 ω^2)/(1 + c^2 r^2 ω^2)], {ω, .1, 100}]
```



RC circuit



a) Bereken van bovenstaand circuit de overdrachtfunctie (transfer function) $H = \frac{V_o}{V_i}$.

```
Clear[r, c];
H = (1/(I ω c))/(r + 1/(I ω c)) // Simplify
```

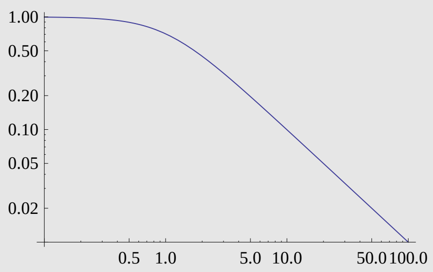
$$\frac{i}{i - c\, r\, \omega}$$

b) Bereken ook de grootte van H: $|H|$.

```
Sqrt[i/(i - c r ω) · (-i)/(-i - c r ω)] // Simplify
```

$$\sqrt{\frac{1}{1+c^2 r^2 \omega^2}}$$

```
r = c = 1; LogLogPlot[Sqrt[1/(1 + c^2 r^2 ω^2)], {ω, .1, 100}]
```

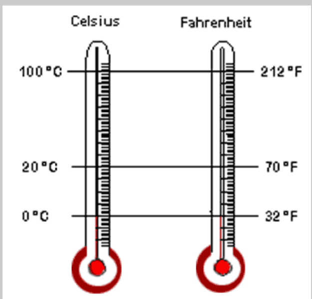


RC circuit als model van een thermometer

Geef aan wat de elementen van het RC circuit voorstellen, als je dit ziet als een model voor een kwikthermometer. Wat stelt R dan voor? Wat stelt C dan voor?

Als je deze thermometer sneller wilt maken, zodat hij snelle temperatuurschommelingen kan meten, wat moet je dan aanpassen? R, C, of allebei? Als allebei, in welke combinatie dan?

Antwoord:



De weerstand R stelt voor hoe moeilijk het is voor de warmte om door te dringen tot het vloeistofreservoir (de rode mantel/wand, vaak van glas). Hoe dunner deze wand, hoe lager de *thermische weerstand*.

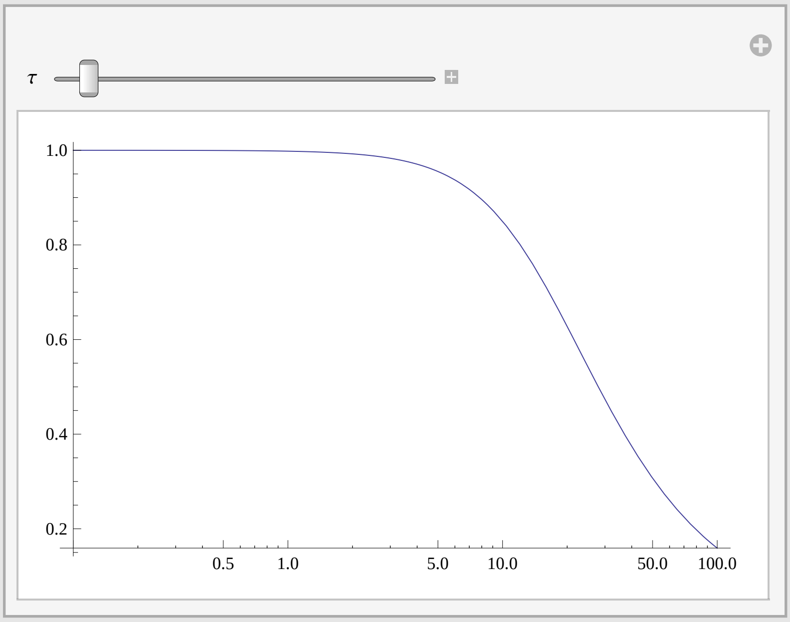
De capaciteit C stelt de warmtecapaciteit voor van het reservoir.

Hoe kleiner deze C, en hoe kleiner R, hoe sneller de thermometer zal kunnen opwarmen (en afkoelen). Het product RC wordt ook wel de *tijdconstante* $RC = \tau$ van de thermometer genoemd.

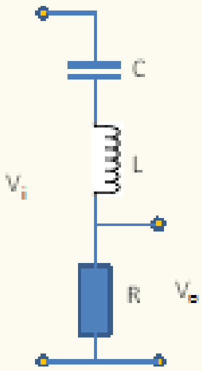
Check met de Manipulate functie hieronder dat voor kleinere τ hogere frequenties kunnen worden gemeten met deze thermometer.

```
Manipulate[LogLinearPlot[Sqrt[1/(1 + τ^2 ω^2)], {ω, .1, 100}], {τ, .01, 1}]
```

$$\text{Manipulate}\left[\text{LogLinearPlot}\left[\sqrt{\frac{1}{1+\tau^2\,\omega^2}}, \{\omega, .1, 100\}\right], \{\tau, .01, 1\}\right]$$



LC circuit



Een weerstand, een spoel en een condensator achter elkaar geeft een heel speciaal circuit. Nu krijgen we een tweede orde systeem.

a) Bereken de overdrachtsfunctie $H = \frac{V_0}{V_i}$ van dit model, zoals hierboven aangegeven.

Antwoord:

$$\texttt{Clear[r, c, l];}$$
$$\texttt{H} = \frac{\texttt{r}}{\texttt{r} + \texttt{I}\,\omega\,\texttt{l} + \frac{1}{\texttt{I}\,\omega\,\texttt{c}}}\ \texttt{// Simplify}$$

$$\frac{c\,r\,\omega}{-i + c\,\omega\,(r + i\,l\,\omega)}$$

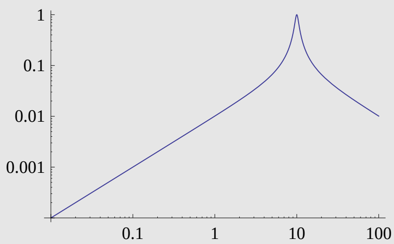
De overdrachtsfunctie H:

$$\sqrt{\left(\frac{c\,r\,\omega}{-i + c\,\omega\,(r + i\,l\,\omega)}\ \frac{c\,r\,\omega}{+i + c\,\omega\,(r - i\,l\,\omega)}\right)}\ \texttt{// Simplify}$$

$$\sqrt{\left(\left(c^2\,r^2\,\omega^2\right) \Big/ \left(1 - 2\,c\,l\,\omega^2 + c^2\,\omega^2\,\left(r^2 + l^2\,\omega^2\right)\right)\right)}$$

De grafiek van de frequentie afhankelijkheid van H:

$$\texttt{r = l = c = .1; LogLogPlot}\left[\sqrt{\left(\left(c^2\,r^2\,\omega^2\right) \Big/ \left(1 - 2\,c\,l\,\omega^2 + c^2\,\omega^2\,\left(r^2 + l^2\,\omega^2\right)\right)\right)},\ \{\omega, .01, 100\}\right]$$



Dit is karakteristiek voor een *bandfilter*, zowel de lage als de hoge frequenties worden ‘eruit gefilterd’.

Facultatief:

Bij de waarde $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ treedt *resonantie* op. We berekenen hieronder het maximum in bovenstaande curve, door de formule te differentiëren (met de functie D[ ]) naar ω, en uit te rekenen waar deze afgeleide vervolgens nul is.

$$\texttt{Clear[r, c, l]; afgeleide = D}\left[\sqrt{\left(\left(c^2\,r^2\,\omega^2\right) \Big/ \left(1 - 2\,c\,l\,\omega^2 + c^2\,\omega^2\,\left(r^2 + l^2\,\omega^2\right)\right)\right)},\ \omega\right]\ \texttt{// Simplify}$$

$$\left(\left(1 - c^2\,l^2\,\omega^4\right)\sqrt{\left(\left(c^2\,r^2\,\omega^2\right) \Big/ \left(1 - 2\,c\,l\,\omega^2 + c^2\,\omega^2\,\left(r^2 + l^2\,\omega^2\right)\right)\right)}\right) \Big/ \left(\omega + c\,\left(-2\,l + c\,r^2\right)\omega^3 + c^2\,l^2\,\omega^5\right)$$

$$\texttt{Solve[afgeleide == 0, }\omega\texttt{]}$$

$$\left\{\left\{\omega \to -\frac{1}{\sqrt{c}\,\sqrt{l}}\right\}, \left\{\omega \to -\frac{i}{\sqrt{c}\,\sqrt{l}}\right\}, \left\{\omega \to \frac{i}{\sqrt{c}\,\sqrt{l}}\right\}, \left\{\omega \to \frac{1}{\sqrt{c}\,\sqrt{l}}\right\}\right\}$$

Het laatste antwoord is niet negatief en niet complex; dat is het antwoord dat we moeten hebben: het maximum (de resonantie) ligt bij $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.