Vandaag

- Uur 1: Differentiaalvergelijkingen
- Uur 2: Modellen

Diferentiaalvergelijkingen

- Wiskundige beschrijving van dynamische processen
- Vergelijking voor $y(t)$: grootheid die in de tijd varieert
- Voorbeelden:
  - stroom in een circuit
  - uitwijking van een pendulum vanuit de evenwichtsstand
  - aantal atomen die vervallen in een radioactieve monster

Differentiaalvergelijkingen

- Vergelijking waarin naast y(t) ook de afgeleiden voorkomen: y'(t), y''(t), ...
- Orde: hoogste afgeleide
- Oplossen voor y(t)

In dit college:

- Lineaire differentiaalvergelijkingen van orde 2:
  - $y(t), y'(t), y''(t)$
  - Vergelijking is een lineaire combinatie van deze functies

Algemene vorm

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

- a, b, c reëele constanten, a is niet nul
- Oplossing y(t) in termen van a, b, c en startwaarden y(0), y’(0)

Oplossingen

- We proberen een oplossing van de vorm [Euler]:

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

Waarom?

Oplossingen

- Invullen in de differentiaalvergelijking geeft [karakteristieke vergelijking]:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

2 wortels, 2 oplossingen y(t):

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 \cdot t} \qquad y_2(t) = e^{\lambda_2 \cdot t}$$

Algemene oplossing

- We beschouwen lineaire differentiaalvergelijkingen, daarom hebben we:

$$y(t) = A_1 e^{\lambda_1 \cdot t} + A_2 e^{\lambda_2 \cdot t}$$

constanten

startwaarden y(0), y'(0) nodig om constanten te bepalen

Type oplossingen y(t)

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Drie types oplossingen afhankelijk van de aard van de wortels:
  - 2 reële wortels: $b^2 - 4ac > 0$
  - 2 complexe wortels: $b^2 - 4ac < 0$
  - 1 reële wortel: $b^2 - 4ac = 0$

1) Twee reeële wortels

$$b^2 - 4ac > 0$$

- Oplossing y(t) is gewoon:

$$y(t) = A_1 e^{\lambda_1 \cdot t} + A_2 e^{\lambda_2 \cdot t}$$

2) Twee complexe wortels

$$b^2 - 4ac < 0$$

- Beschouw de wortels $\lambda_1 = p + iq$, $\lambda_2 = p - iq$

$$y(t) = e^{pt}\,(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt)$$

reële constanten geven reële oplossing

3) Één reële oplossing

$$b^2 - 4ac = 0$$

- We hebben slechts één oplossing y(t) $y_1(t) = e^{\lambda \cdot t}$
- We vinden nog een oplossing ("reduction of order") $y_2(t) = te^{\lambda \cdot t}$
- Algemene oplossing is dan:

$$y(t) = A_1 e^{\lambda \cdot t} + A_2 t e^{\lambda \cdot t}$$

Voorbeelden

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0$$

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$$

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 0$$

Modelleren

- Een “real-life” proces beschrijven d.m.v. vergelijkingen
- Deze vergelijkingen noemen we een model voor het betreffende proces
- Voorbeelden: het vloeien van een vloeistof, gedrag van aandelen op de beurs, groei van de bevolking in een bepaalde land, geluidsvoortplanting door de gehoorgang, opname en wash-out van een geneesmiddel, ...

Modelleren

- Wat is het nut van een model?
  - “real-life” processen (beter) begrijpen
  - voorspellingen doen over hun toekomstige gedrag

Types modellen

- Structurele modellen: relatie tussen de fysische elementen.
  - Voorbeeld: circuit.
- Functionele modellen: weergeven slechts de relatie tussen input en output - “black box”.
  - Voorbeeld: puls response, transfer functie (worden nog behandeld).

Modelleren

- We willen graag dynamische processen modelleren
- Gedrag van het proces varieert in de tijd
- Dynamische processen worden beschreven d.m.v. differentiaalvergelijkingen

Modelleren

- Opmerkingen:
  - Modellen zijn altijd eenvoudiger dan het “real-life” proces zelf
  - Ze kunnen daarom het proces niet in zijn geheel beschrijven
  - Is mijn model “goed genoeg”?
    - Complex genoeg om het echte proces redelijk te beschrijven
    - Niet zo complex dat wij er niks aan hebben

Een model opbouwen

- Parameters en variabelen (-toestanden-) in het model identificeren
- Welke fysische wetten zijn van toepassing?
- Vergelijkingen opschrijven m.b.v. deze wetten: parameters en variabelen aan elkaar relateren

Een model opbouwen

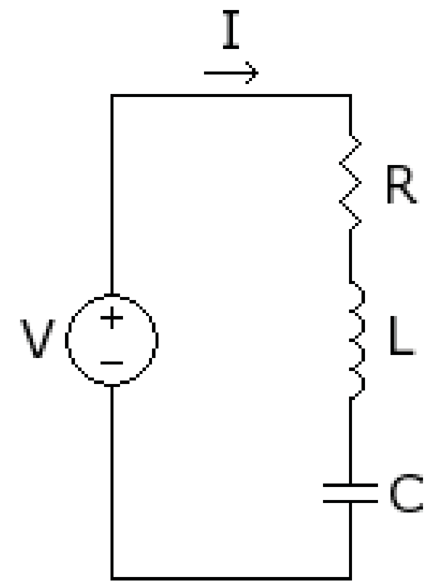
- Opmerkingen:
  - Wanneer gelden de vergelijkingen?
  - Op welke manier kunnen ze opgelost worden?
    - Exact
    - Niet exact: bepaalde aannames, computersimulaties, ...

Een model testen

- Door het meten krijgen we echte gegevens over de toestand
- Door de vergelijkingen op te lossen krijgen we gegevens uit het model
- Echte gegevens en gegevens uit het model kunnen dan met elkaar vergeleken worden
- Als het nodig is, model (vergelijkingen) aanpassen

RLC circuit (serie schakeling)

- R: weerstand
- C: capaciteit van de condensator
- L: inductie van de spoel
- i: stroom door het circuit
- V: spanning van de spanningsbron



RLC circuit (serie schakeling)

- Dynamische proces: het vloeien van stroom in het circuit
- Fysische wet: Kirchhoffs spanningswet
- Differentiaalvergelijking: voor $i(t)$

RLC circuit (serie schakeling)

- Kirchhoffs spanningswet: som van spanningsverschillen in een gesloten circuit gelijk aan nul
- 4 spanningsverschillen:
  - spanningsbron: V
  - weerstand: $V_R = i \cdot R$
  - condensator: $V_C = \frac{1}{C} \int_{t=0}^{t} i \, dt$
  - spoel: $V_L = L \cdot \frac{di}{dt}$

RLC circuit (serie schakeling)

- Differentiaalvergelijking voor i(t):

$$LC\,\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + RC\,\frac{di(t)}{dt} + i(t) = 0$$