Antwoorden

1. Rekenen met complexe getallen

1.1 a. -9 b. -9 c. 16 d. i e. 1

1.2 a. $-\frac{1}{2}$ b. $-\frac{2}{3}$ c. -1 d. $-\frac{4}{3}$ e. $-\frac{3}{4}$

1.3 a. $\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ b. $3\,\mathrm{i}$ c. $2\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ d. $5\,\mathrm{i}$ e. $\sqrt{15}\,\mathrm{i}$

1.4 a. $\sqrt{33}\,\mathrm{i}$ b. $7\,\mathrm{i}$ c. $4\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ d. $3\sqrt{5}\,\mathrm{i}$ e. $5\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

1.5 a. $1 \pm \mathrm{i}$ b. $-2 \pm \mathrm{i}$ c. $-1 \pm 3\,\mathrm{i}$ d. $3 \pm \mathrm{i}$ e. $2 \pm 2\,\mathrm{i}$

1.6 a. $6 \pm 2\,\mathrm{i}$ b. $2 \pm \sqrt{2}\,\mathrm{i}$ c. $-1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ d. $3 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ e. $-4 \pm 2\,\mathrm{i}$

1.7 Het eerste, het derde en het vierde gelijkteken zijn in orde, het eerste volgens de definitie van $\sqrt{-1}$ als een getal waarvoor het kwadraat gelijk is aan -1, en het vierde volgens de definitie van $\sqrt{1}$ als het positieve reële getal waarvan het kwadraat gelijk is aan 1. Het derde gelijkteken geldt omdat $(-1)^2 = 1$. Het tweede gelijkteken kan dus niet geldig zijn. Blijkbaar geldt niet voor negatieve reële getallen a dat $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2$. (Deze regel geldt wel als $a \geq 0$.)

Bij de volgende opgaven geven we alleen de uitkomst en de absolute waarde ervan. Teken ze zelf.

1.8 a. $4 - 6\,\mathrm{i}, 2\sqrt{13}$ b. $-4 + 4\,\mathrm{i}, 4\sqrt{2}$ c. $1, 1$ d. $3 - 3\,\mathrm{i}, 3\sqrt{2}$ e. $5 - 3\,\mathrm{i}, \sqrt{34}$

1.9 a. $-5 - 10\,\mathrm{i}, 5\sqrt{5}$ b. $4 + 8\,\mathrm{i}, 4\sqrt{5}$ c. $8, 8$ d. $-8 - 6\,\mathrm{i}, 10$ e. $3 - 4\,\mathrm{i}, 5$

1.10 a. $-\mathrm{i}, 1$ b. $1, 1$ c. $\mathrm{i}, 1$ d. $-1, 1$ e. $-1, 1$

1.11 a. $-\mathrm{i}, 1$ b. $-8\,\mathrm{i}, 8$ c. $128\,\mathrm{i}, 128$ d. $-2 + 2\,\mathrm{i}, 2\sqrt{2}$ e. $-2 - 2\,\mathrm{i}, 2\sqrt{2}$

Bij de volgende opgaven geven de lijnen alleen als een vergelijking in xy-coördinaten. Teken ze zelf.

1.12 a. $x = 4$ b. $x = -3$ c. $y = 2$ d. $y = -2$ e. $x = y$

1.13 a. $x + y = 1$ b. $x = 2y$ c. $x - 2y = 1$ d. $x + y = 5$ e. $y = 0$

Bij de volgende opgaven geven we alleen het middelpunt en de straal.

1.14 a. $0, 4$ b. $1, 3$ c. $2, 2$ d. $3, 1$ e. $-1, 5$

1.15 a. $-3, 4$ b. $\mathrm{i}, 5$ c. $-2\,\mathrm{i}, 1$ d. $1 + \mathrm{i}, 3$ e. $-3 + \mathrm{i}, 2$

1.16 a. $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}\,\mathrm{i}$ b. $\frac{3}{5} + \frac{3}{10}\,\mathrm{i}$ c. $-\frac{6}{5} - \frac{2}{5}\,\mathrm{i}$ d. $\frac{11}{5} + \frac{3}{5}\,\mathrm{i}$ e. $\frac{8}{13} + \frac{1}{13}\,\mathrm{i}$

Antwoorden

1.17 a. $-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\,\mathrm{i}$ b. $-\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\,\mathrm{i}$ c. $-\mathrm{i}$ d. $-3-\mathrm{i}$ e. i

1.18 a. $\frac{9}{25}+\frac{12}{25}\,\mathrm{i}$ b. $\frac{1}{5}+\frac{7}{5}\,\mathrm{i}$ c. $-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\,\mathrm{i}$ d. $-\mathrm{i}$ e. i

1.19 a. $-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\,\mathrm{i}$ b. $\frac{4}{13}-\frac{7}{13}\,\mathrm{i}$ c. $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\,\mathrm{i}$ d. $1+2\mathrm{i}$ e. i

2. De meetkunde van het complexe rekenen

2.1 a. $-3\mathrm{i}$ b. $-3+\mathrm{i}$ c. $3-5\mathrm{i}$ d. -8 e. 0

2.2 Zelf doen

2.3 a. $\bar{z}z+\mathrm{i}z-\mathrm{i}\bar{z}-8=0$ b. $\bar{z}z-(1+\mathrm{i})z-(1-\mathrm{i})\bar{z}=0$ c. $\bar{z}z-z-\bar{z}=0$
d. $\bar{z}z+(2+\mathrm{i})z+(2-\mathrm{i})\bar{z}+1=0$ e. $\bar{z}z-(1+2\mathrm{i})z-(1-2\mathrm{i})\bar{z}+4=0$

2.4 a. $(z+\mathrm{i})(\bar{z}-\mathrm{i})=1$ dus middelpunt $-\mathrm{i}$, straal 1
b. $(z+(1-\mathrm{i}))(\bar{z}+(1+\mathrm{i}))=4$ dus middelpunt $-1+\mathrm{i}$, straal 2
c. $(z-2\mathrm{i})(\bar{z}+2\mathrm{i})=0$ dus middelpunt $2\mathrm{i}$, straal 0
d. $(z+2)(\bar{z}+2)=-1$ dus geen cirkel
e. $(z+(2+\mathrm{i}))(\bar{z}+(2-\mathrm{i}))=6$ dus middelpunt $-2-\mathrm{i}$, straal $\sqrt{6}$

Bij de volgende twee opgaven geven we alleen de argumenten.

2.5 a. $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ b. $\pi+2k\pi$ c. $2k\pi$ d. $\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ e. $\frac{\pi}{3}+2k\pi$

2.6 a. $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ b. $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ c. $-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ d. $\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ e. $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

2.7 a. i b. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ c. i d. $\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\,\mathrm{i}$ e. $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

2.8 a. $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ b. $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ c. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ d. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\,\mathrm{i}$
e. $\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{i}$

2.9 a. -1 b. 1 c. i d. -1 e. 1

2.10 a. i b. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ c. i d. $\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\,\mathrm{i}$ e. 1

2.11 a. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ b. -1 c. $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ d. -1 e. -1

2.12 a. i b. i c. $-\mathrm{i}$ d. i e. -1

In de volgende twee opgaven kiezen we het argument steeds in het interval $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\rangle$.

2.13 a. $2.2361\,\mathrm{e}^{1.1072\,\mathrm{i}}$ b. $4.4721\,\mathrm{e}^{-0.4636\,\mathrm{i}}$ c. $3.6056\,\mathrm{e}^{-0.9828\,\mathrm{i}}$ d. $3.6056\,\mathrm{e}^{4.1244\,\mathrm{i}}$
e. $3\,\mathrm{e}^{3.1416\,\mathrm{i}}$

2.14 a. $2.2361\,\mathrm{e}^{.4636\,\mathrm{i}}$ b. $2.2361\,\mathrm{e}^{-0.4636\,\mathrm{i}}$ c. $\mathrm{e}^{-1.5708\,\mathrm{i}}$ d. $5.0990\,\mathrm{e}^{2.9442\,\mathrm{i}}$
e. $3\,\mathrm{e}^{-1.5708\,\mathrm{i}}$

2.15 a. $-0.8323+1.8186\,\mathrm{i}$ b. $1.6209-2.5244\,\mathrm{i}$ c. $0.1911+0.0591\,\mathrm{i}$
d. $-0.9614+0.7182\,\mathrm{i}$ e. $-1.0000+0.0001\,\mathrm{i}$

2.16 a. $3\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}$ b. $9\,\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}}$ c. $243\,\mathrm{e}^{10\mathrm{i}}$ d. $\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}$ e. $3^n\,\mathrm{e}^{-2n\,\mathrm{i}}$

2.17 a. $\overline{z_1z_2}=\overline{2\,\mathrm{e}^{5\mathrm{i}}3\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}}}=\overline{6\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}}}=6\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}}=2\,\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}}3\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$.
Onderdeel (b.) gaat op dezelfde manier.

2.18 a. $\overline{z_1z_2}=\overline{r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}}=\overline{r_1r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}}=r_1r_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}=r_1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_1}r_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_2}=$
$\overline{z_1}\,\overline{z_2}$. Onderdeel (b.) gaat op dezelfde manier.

2.19 a. $-3.0749 + 6.7188\,\mathrm{i}$ b. $10.8523 - 16.9014\,\mathrm{i}$ c. $1.1669 + 0.3609\,\mathrm{i}$
d. $-2.6599 + 1.9870\,\mathrm{i}$ e. $-0.6065 + 0.0010\,\mathrm{i}$

2.20 a. $0.0269 + 0.0419\,\mathrm{i}$ b. $17.6267 - 9.6295\,\mathrm{i}$ c. $-0.1340 - 0.0191\,\mathrm{i}$
d. $0.1044 - 0.3528\,\mathrm{i}$ e. $-2.2033 + 0.3141\,\mathrm{i}$

2.21 a. 1.5431 b. -1.5431 c. $-3.6269\,\mathrm{i}$ d. $-9.1545 + 4.1689\,\mathrm{i}$ e. $-9.1545 + 4.1689\,\mathrm{i}$

2.22 a. Op de y-as geldt dat $x = 0$, dus $\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ en als y van 0 naar 2π loopt, doorloopt $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ de gehele eenheidscirkel.
b. Eigenlijk vallen ze samen, maar op deze manier getekend zie je duidelijker hoe dit stukje y-as wordt afgebeeld.
c. De horizontale lijnen in het z-vlak zijn de lijnen $y = \frac{k}{6}\pi$ voor $k = 0, 1, \ldots, 12$. Ze komen in het w-vlak terecht op de getekende stralen. Als x daarbij van min oneindig naar plus oneindig loopt, wordt zo'n straal doorlopen vanaf de oorsprong naar oneindig.
d. Nee. Als $w = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = 0$ zou zijn, zou de absolute waarde ook 0 zijn. Die is e^{x}, maar dat is positief voor elke x.
e. De cirkels in het w-vlak met middelpunt 0 en straal respectievelijk e en $\mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.
f. De eenheidscirkel, die oneindig vaak wordt doorlopen als y van min oneindig naar plus oneindig loopt.
g. $z = \frac{1}{2}\pi\,\mathrm{i}$ heeft als beeld $w = \mathrm{i}$, maar omdat e^{z} periodiek is met periode $2\pi\,\mathrm{i}$ worden alle punten $z = \frac{1}{2}\pi\,\mathrm{i} + 2k\pi\,\mathrm{i}$ (k geheel) ook op i afgebeeld.

3. Wortels en polynomen

3.1 a. $\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})\mathrm{i}}\,(k = 0, 1, 2)$ b. $\mathrm{e}^{(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})\mathrm{i}}\,(k = 0, 1, 2)$ c. $\mathrm{e}^{(\frac{2k\pi}{3})\mathrm{i}}\,(k = 0, 1, 2)$
d. $2\,\mathrm{e}^{(\frac{2k\pi}{3})\mathrm{i}}\,(k = 0, 1, 2)$ e. $2\,\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})\mathrm{i}}\,(k = 0, 1, 2)$

3.2 a. $\sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})\mathrm{i}}\,(k = 0, 1, 2)$ b. $3\,\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3})\mathrm{i}}\,(k = 0, 1, 2)$ c. $3\,\mathrm{e}^{(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})\mathrm{i}}\,(k = 0, 1, 2)$
d. $\mathrm{e}^{(-\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3})\mathrm{i}}\,(k = 0, 1, 2)$ e. $2\,\mathrm{e}^{k\pi\mathrm{i}}\,(k = 0, 1)$ (dit zijn de getallen 2 en -2)

3.3 a. $\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2})\mathrm{i}}\,(k = 0, 1, 2, 3)$ b. $\mathrm{e}^{(-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})\mathrm{i}}\,(k = 0, 1, 2, 3)$ c. $\mathrm{e}^{(\frac{2k\pi}{5})\mathrm{i}}\,(k = 0, 1, 2, 3, 4)$
d. $\sqrt[4]{5}\,\mathrm{e}^{(-0.2318+\frac{k\pi}{2})\mathrm{i}}\,(k = 0, 1, 2, 3)$ e. $\sqrt[6]{6}\,\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3})\mathrm{i}}\,(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$

3.4 a. $\sqrt[8]{2}\,\mathrm{e}^{(-\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2})\mathrm{i}}\,(k = 0, 1, 2, 3)$ b. $2\,\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5})\mathrm{i}}\,(k = 0, 1, 2, 3, 4)$
c. $3\,\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})\mathrm{i}}\,(k = 0, 1, 2, 3)$ d. $\sqrt[7]{2}\,\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{14}+\frac{2k\pi}{7})\mathrm{i}}\,(k = 0, \ldots, 6)$ e. $\sqrt[6]{18}\,\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})\mathrm{i}}\,(k = 0, 1, 2)$

3.5 a. $z^2 - 1$ b. $z^2 - 6z + 5$ c. $z^2 - (1 + \mathrm{i})z + \mathrm{i}$ d. $z^2 + \mathrm{i}z + 2$ e. $z^2 - 2z + 2$

3.6 a. $z^2 + \mathrm{i}z$ b. $z^2 - 3z + 2$ c. $z^2 + 2\mathrm{i}z$ d. $z^2 - 2z + 5$ e. $z^2 - 2\mathrm{i}z - 2$

3.7 a. $z^3 - z$ b. $z^3 + z$ c. $z^3 - z^2 + z - 1$ d. $z^3 - 6\mathrm{i}z^2 - 11z + 6\mathrm{i}$ e. $z^3 - \mathrm{i}z^2 - z + \mathrm{i}$

3.8 a. $z^3 - 6z^2 + 11z - 6$ b. $z^3 - 3z^2 + 4z - 2$ c. $z^3 - 3z^2 + 2z$ d. $z^3 - (1 + \mathrm{i})z^2 + \mathrm{i}z$
e. $z^3 - 2\mathrm{i}z^2 + z - 2\mathrm{i}$

3.9 a. $z^3 - 2z^2$ b. $z^3 + 3z$ c. $z^4 - 1$ d. $z^3 - 2z^2 + z - 2$ e. $z^3 - \mathrm{i}z^2 - z + \mathrm{i}$
f. $z^3 + \mathrm{i}z^2 + z + \mathrm{i}$

3.10 a. enkelvoudig, $z = 0$ (tweevoudig), $z = 2$ b. enkelvoudig, $z = 0$, $z = \sqrt{3}\,\mathrm{i}$, $z = -\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ c. tweevoudig, $z = 1$, $z = -1$, $z = -\mathrm{i}$ d. tweevoudig, $z = \mathrm{i}$, $z = -\mathrm{i}$
e. enkelvoudig, $z = 1$, $z = -1$, $z = \mathrm{i}$ f. tweevoudig, $z = -\mathrm{i}$ (ook tweevoudig)

3.11 a. $z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1)$ b. $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$

bron: www.science.uva.nl/~craats

c. $z^4-1=(z^2+1)(z-1)(z+1)$ d. $z^3+27=(z+3)(z^2-3z+9)$
e. $z^4+2z^2+1=(z^2+1)^2$ f. $z^4-2z^2+1=(z-1)^2(z+1)^2$

3.12 Als je $p(x)$ op de aangegeven wijze schrijft, zie je dat $p(x)$ voor grote *positieve* x-waarden vrijwel gelijk is aan x^n, en dus ook positief is. Ook voor grote *negatieve* x-waarden is $p(x)$ vrijwel gelijk aan x^n, maar x^n is dan negatief (want n is oneven). We zien dus dat $p(x)$ voor grote negatieve x-waarden negatief moet zijn, en voor grote positieve x-waarden positief. Daartussen moet $p(x)$ dus minstens één maal nul worden. Degenen die bedreven zijn in limieten, kunnen het bovenstaande als volgt nader preciseren : er geldt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)=1$$

en evenzo $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{p(x)}{x^n}=1$.

4. Lineaire recursies

4.1 a. kar. vgl.: $\alpha^2-0.5\alpha-0.83=0$, $D=3.57$, $\alpha_1=1.1947$, $\alpha_2=-0.6947$
b. kar. vgl.: $\alpha^2-0.5\alpha-0.3=0$, $D=1.45$, $\alpha_1=0.8521$, $\alpha_2=-0.3521$
c. kar. vgl.: $\alpha^2+0.5\alpha-0.3=0$, $D=1.45$, $\alpha_1=0.3521$, $\alpha_2=-0.8521$
d. kar. vgl.: $\alpha^2+2\alpha+1.13=0$, $D=-0.52$, $\alpha_1=-1+0.3606\,\mathrm{i}$, $\alpha_2=-1-0.3606\,\mathrm{i}$

4.2 a. Omdat niet de waarden x_k maar de waarden $y_k=\log x_k$ in de grafiek zijn gezet, zijn de schaalwaarden op de verticale as niet $0,1,2,\ldots$ genoemd, maar $1(=10^0),10,10^2,\ldots$. Een punt $(k,\log x_k)$ met bijvoorbeeld $x_k=1000$ ligt dan ook op de horizontale lijn met schaalwaarde $10^3=1000$.
b. De horizontale lijnen zijn getekend op hoogte $\log 1=0,\log 2,\log 3,\ldots,\log 10=1$, $\log 20,\log 30,\ldots,\log 100=2,\log 200,\log 300\ldots$
c. Omdat x_k op den duur vrijwel gelijk is aan $A_1{\alpha_1}^k$ is y_k dan vrijwel gelijk aan $\log\left(A_1{\alpha_1}^k\right)=\log A_1+k\log\alpha_1$. Dit is van de vorm $y=a+bk$ met $a=\log A_1$ en $b=\log\alpha_1$ en dus liggen die punten op een rechte lijn.
d. Zie onderdeel (c.). Hier is $A_1=\frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}$ en $\alpha_1=\frac{1+\sqrt5}{2}$ dus $\log A_1\approx-0.1405$ en $\log\alpha_1\approx .2090$. Bedenk bij het controleren dat de schalen op de horizontale as en de verticale as niet gelijk zijn!

4.3 a. $y_{k+1}=\frac25\sqrt5\,y_k-y_{k-1}$, $y_0=1$, $y_1=-\frac{1}{\sqrt5}$
b. $f(t)=\cos(\varphi t)-\sin(\varphi t)$
c. $f(t)=\sqrt2\left(\frac12\sqrt2\cos(\varphi t)-\frac12\sqrt2\sin(\varphi t)\right)=\sqrt2\big(\cos\frac{\pi}{4}\cos(\varphi t)-\sin\frac{\pi}{4}\sin(\varphi t)\big)=$
$=\sqrt2\cos\left(\varphi t+\frac{\pi}{4}\right)$. Er geldt dus $A=\sqrt2\approx1.4142$, $\nu=\frac{\varphi}{2\pi}\approx0.1762$, $\chi=\frac{\pi}{4}\approx0.7854$. De periodelengte $T=\frac1\nu\approx5.6751$ is bijna 6, zoals ook in de figuur te zien is.

4.4 $A_1=\frac12(C_1-\mathrm{i}\,C_2)=\frac12(1+\mathrm{i})$, $A_2=\frac12(C_1+\mathrm{i}\,C_2)=\frac12(1-\mathrm{i})$

4.5 a. $r=\sqrt5$, $C_1=1$, $C_2=-\frac12$, $\varphi=\arctan 2$, $c=\frac14\sqrt5$, $\chi=\arctan\frac12$
b. $r=\sqrt5$, $C_1=1$, $C_2=0$, $\varphi=\arctan 2$, $c=\frac12$, $\chi=0$
c. $r=\sqrt5$, $C_1=0$, $C_2=\frac12$, $\varphi=\arctan 2$, $c=\frac14$, $\chi=-\frac{\pi}{2}$
d. $r=1$, $C_1=1$, $C_2=-\sqrt3$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$, $c=1$, $\chi=\frac{\pi}{3}$

e. $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $C_1 = 1$, $C_2 = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $c = \frac{1}{2}\sqrt{10}$, $\chi = -\arctan 3$

4.6 $x_2 = 199.75$, $x_3 = 149.75$, $x_4 = 99.8025$. Verder geldt $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0$ en $\lim_{k\to\infty} \frac{k}{2^k} = 0$ dus ook $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$.

4.7 a. $x_k = -\frac{1}{2}\,k\,(-2)^k$ b. $x_k = 2^k - k\,2^k$ c. $x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k + k\left(\frac{1}{2}\right)^k$
d. $x_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^k + k\left(-\frac{1}{2}\right)^k$ e. $x_k = 10\,(-1)^k - 11k\,(-1)^k$

4.8 a. $x_k = \frac{1}{2}\,3^k - \frac{1}{2}\,(-1)^k$ b. $x_k = -2\,\left(2^k\right) + 3$ c. $x_k = \frac{1}{3}(\sqrt{13})^k \sin(k\varphi)$ met $\varphi = \arctan\frac{3}{2}$ d. $x_k = (\sqrt{5})^k\left(2\cos(k\varphi) - \frac{3}{2}\sin(k\varphi)\right)$ met $\varphi = \arctan 2$

e. $\alpha = 1$ is zelfs een drievoudige wortel van de karakteristieke vergelijking, dus de algemene oplossing is van de vorm $x_k = A + Bk + Ck^2$. Invullen van $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ geeft een stelsel met als oplossing $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$ zodat $x_k = 1 + \frac{1}{2}\,k - \frac{1}{2}\,k^2$.

5. Lineaire differentiaalvergelijkingen

5.1 a. kar. vgl.: $\lambda^2 + 1.1\lambda + 0.1 = 0$, $D = 0.81$, $\lambda_1 = -0.1$, $\lambda_2 = -1$
b. kar. vgl.: $\lambda^2 + 0.9\lambda - 0.1 = 0$, $D = 1.21$, $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = -1$
c. kar. vgl.: $\lambda^2 + 0.7\lambda + 0.1225 = 0$, $D = 0$, $\lambda = -0.35$
d. kar. vgl.: $\lambda^2 - 0.12\lambda + 4 = 0$, $D = -15.9856$, $\lambda_1 = 0.06 + 1.9991\,\mathrm{i}$, $\lambda_2 = 0.06 - 1.9991\,\mathrm{i}$

5.2 a. $y(t) = -\mathrm{e}^{-t}$ b. $y(t) = \mathrm{e}^{-2t} - 2\,\mathrm{e}^{-t}$ c. $y(t) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{t} - \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-2t}$
d. $y(t) = 4\,\mathrm{e}^{-2t} - 3\,\mathrm{e}^{-3t}$ e. $y(t) = -12\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + 12\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}$

5.3 a. $y(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}\,t\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}$ b. $y(t) = -\mathrm{e}^{-3t} - 2\,t\,\mathrm{e}^{-3t}$ c. $y(t) = t\,\mathrm{e}^{-t}$
d. $y(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + \frac{5}{2}\,t\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ e. $y(t) = \mathrm{e}^{t} - t\,\mathrm{e}^{t}$

5.4 a. $y'(t) = p\mathrm{e}^{pt}z(t) + \mathrm{e}^{pt}z'(t)$, $y''(t) = p^2\mathrm{e}^{pt}z(t) + 2p\mathrm{e}^{pt}z'(t) + \mathrm{e}^{pt}z''(t)$

b. Invullen. c. Delen door e^{pt} (dit is ongelijk aan nul voor alle t)

d. Uit $z''(t) = 0$ volgt $z'(t) = A_2$ voor zekere constante A_2 en hieruit volgt $z(t) = A_2t + A_1$ voor zekere constante A_1.

e. Invullen in $y(t) = \mathrm{e}^{pt}z(t)$.

5.5 a. $y(t) = \mathrm{e}^{t}\big(-\cos(2t) + \sin(2t)\big)$ b. $y(t) = \mathrm{e}^{-t}\big(-\cos(t) - \sin(t)\big)$
c. $y(t) = \mathrm{e}^{-2t}\big(\cos(t) + 3\,\sin(t)\big)$ d. $y(t) = \mathrm{e}^{t}\cos(3t)$ e. $y(t) = \mathrm{e}^{-2t}\sin(2t)$

5.6 a. $A_1 = \frac{1}{2}(-1 - \mathrm{i})$, $r = |A_1| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\chi = \arg A_1 = \frac{5\pi}{4}$ dus $y(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{t}\cos(2t + \frac{5\pi}{4})$
b. $A_1 = \frac{1}{2}(-1 + \mathrm{i})$, $r = |A_1| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\chi = \arg A_1 = \frac{3\pi}{4}$ dus $y(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t}\cos(t + \frac{3\pi}{4})$
c. $A_1 = \frac{1}{2}(1 - 3\,\mathrm{i})$, $r = |A_1| = \frac{1}{2}\sqrt{10}$, $\chi = \arg A_1 = -\arctan 3$ dus $y(t) = \sqrt{10}\,\mathrm{e}^{-2t}\cos(t - \arctan 3)$
d. $A_1 = \frac{1}{2}$, $r = |A_1| = \frac{1}{2}$, $\chi = \arg A_1 = 0$ dus $y(t) = \mathrm{e}^{t}\cos(3t)$
e. $A_1 = -\frac{1}{2}\,\mathrm{i}$, $r = |A_1| = \frac{1}{2}$, $\chi = \arg A_1 = -\frac{\pi}{2}$ dus $y(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos(2t - \frac{\pi}{2})$

5.7 Massaveersysteem met wrijving nul: $mu''(t) + ku = 0$. $\lambda = \pm\,\mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}$ dus $p = 0$ en $q = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Algemene oplossing: $u(t) = 2r\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \chi\right)$. Frequentie $\frac{q}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

bron: www.science.uva.nl/~craats

Amplitude $A = 2r = 2\sqrt{u(0)^2 + \frac{m}{k}u'(0)^2}$

Stroomkring met weerstand nul: $LCv''(t) + v = 0$. $\lambda = \pm\,\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{LC}}$ dus $p = 0$ en $q = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. Algemene oplossing: $v(t) = 2r\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}}\,t + \chi\right)$. Frequentie $\frac{q}{2\pi} = \frac{\sqrt{LC}}{2\pi}$. Amplitude $A = 2r = 2\sqrt{v(0)^2 + \frac{1}{LC}v'(0)^2}$

5.8 Massaveersysteem: karakteristieke vergelijking: $m\lambda^2 + d\lambda + k = 0$. Als $D > 0$ zijn de beide wortels negatief want $\lambda_1\lambda_2 = \frac{k}{m} > 0$ en $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{d}{m} < 0$. De beide basisoplossingen zijn dus *dalende* e-machten en dus geldt $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$. Als $D = 0$ is $\lambda = -\frac{d}{2m} < 0$ en dan geldt dus ook voor de beide basisoplossingen dat ze naar nul gaan als t naar oneindig gaat. Als $D < 0$ is $p = -\frac{d}{2m} < 0$. De algemene oplossing is dan het product van een sinusoïde en een *dalende* e-macht (gedempte trilling), en ook dan is de limiet nul als t naar oneindig gaat.

Bij stroomkringen verloopt de redenering analoog.

5.9 a. $y(t) = \mathrm{e}^{-2t}\big(\cos(t) + 4\sin(t)\big)$ b. $y(t) = \mathrm{e}^{-t}(-1 - t)$
c. $y(t) = \cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)$ d. $y(t) = \frac{1}{7}\mathrm{e}^{4t} - \frac{1}{7}\mathrm{e}^{-3t}$ e. $y(t) = -3\,\mathrm{e}^{-4t} + 4\,\mathrm{e}^{-3t}$
f. $y(t) = 1 + \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}t} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}t}\right)$
g. $y(t) = \frac{1}{12}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{12}\mathrm{e}^{t}\left(-\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)\right)$