1 Rekenen met complexe getallen

In dit hoofdstuk leer je rekenen met complexe getallen. Ze vormen een getallensysteem dat een uitbreiding is van het bekende systeem van de reële getallen. Je leert ook hoe je complexe getallen kunt voorstellen als punten in het vlak. Maar voor complexe getallen gebruiken we niet de gewone vlakke coördinaten (x, y) maar een nieuwe notatievorm: $z = x + \mathrm{i}\, y$. Met deze nieuwe notatie wordt rekenen met complexe getallen een eenvoudige zaak. Je leert hoe je daarmee complexe getallen moet optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

1 Rekenen met complexe getallen

1.1 Bereken:

a. $(3\,\mathrm{i}\,)^2$

b. $(-3\,\mathrm{i}\,)^2$

c. $-(4\,\mathrm{i}\,)^2$

d. $(-\,\mathrm{i}\,)^3$

e. $\mathrm{i}^{\,4}$

1.2 Bereken:

a. $(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{i}\,)^2$

b. $(-\frac{1}{3}\sqrt{6}\,\mathrm{i}\,)^2$

c. $(\frac{1}{2}\sqrt{4}\,\mathrm{i}\,)^2$

d. $(\frac{2}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{i}\,)^2$

e. $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}\,)^2$

Schrijf de volgende wortels in de vorm $r\,\mathrm{i}$ waarbij r een positief reëel getal is. Voorbeeld: $\sqrt{-5} = \sqrt{5}\,\mathrm{i}$. Geef exacte antwoorden en vereenvoudig daarbij de wortels zo veel mogelijk (schrijf bijvoorbeeld $3\sqrt{3}$ in plaats van $\sqrt{27}$).

1.3

a. $\sqrt{-3}$

b. $\sqrt{-9}$

c. $\sqrt{-8}$

d. $\sqrt{-25}$

e. $\sqrt{-15}$

1.4

a. $\sqrt{-33}$

b. $\sqrt{-49}$

c. $\sqrt{-48}$

d. $\sqrt{-45}$

e. $\sqrt{-75}$

Los de volgende vierkantsvergelijkingen op. Geef ook hier exacte antwoorden en vereenvoudig de wortels.

1.5

a. $x^2 - 2x + 2 = 0$

b. $x^2 + 4x + 5 = 0$

c. $x^2 + 2x + 10 = 0$

d. $x^2 - 6x + 10 = 0$

e. $x^2 - 4x + 8 = 0$

1.6

a. $x^2 - 12x + 40 = 0$

b. $x^2 - 4x + 6 = 0$

c. $x^2 + 2x + 4 = 0$

d. $x^2 - 6x + 12 = 0$

e. $x^2 + 8x + 20 = 0$

De volgende opgave is een echte puzzelsom. Kom je er niet uit, dan kun je achterin de oplossing bekijken. Maar eerst zelf proberen!

1.7 Bij het rekenen met wortels uit negatieve getallen moet je oppassen zoals blijkt uit de volgende paradoxale 'afleiding':

$$-1 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

Probeer de vinger te leggen op de wonde plek! Met andere woorden, welk van de vier gelijktekens is (of zijn) ten onrechte gezet, en waarom?

Wortels uit negatieve getallen

Op school leer je dat er geen getal x bestaat waarvoor $x^2 = -1$. Kwadraten zijn immers nooit negatief. Maar wat als we ons nu eens *indenken* dat er wél zo'n getal zou bestaan? Een getal, we noemen het "i" (van **i***maginair*, dat wil zeggen denkbeeldig) waarvoor dus geldt dat

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

Je zou dat getal dan een *wortel uit* -1 kunnen noemen: $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Ook uit andere negatieve getallen kun je dan een wortel trekken als je de gewone rekenregels toepast. Zo is $6\,\mathrm{i}$ een wortel uit -36 want $(6\,\mathrm{i})^2 = 6\,\mathrm{i} \times 6\,\mathrm{i} = 36 \times \mathrm{i}^2 = 36 \times (-1) = -36$. Net zo kun je laten zien dat $\sqrt{-13} = \sqrt{13}\,\mathrm{i}$, of dat $\sqrt{-12} = \sqrt{12}\,\mathrm{i} = 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ (bedenk daarbij dat $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$).

Wat we eigenlijk hebben gedaan, is het bepalen van een oplossing van de vergelijking $x^2 = -a$, waarbij a een positief getal is. We vonden $\sqrt{a}\,\mathrm{i}$ als oplossing, maar natuurlijk is $-\sqrt{a}\,\mathrm{i}$ dan ook een oplossing: $(-\sqrt{a}\,\mathrm{i})^2 = (-1)^2(\sqrt{a})^2\,\mathrm{i}^2 = 1 \cdot a \cdot (-1) = -a$. De volledige oplossing van de vergelijking $x^2 = -a$ is dus $x = \pm\sqrt{a}\,\mathrm{i}$.

De *abc*-formule

Als je een getal i hebt waarvoor $\mathrm{i}^2 = -1$, kun je ook elke vierkantsvergelijking oplossen, zelfs als de discriminant negatief is. Bijvoorbeeld $x^2 + 2x + 5 = 0$. Kijk maar:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 5 &= 0 \\ (x+1)^2 + 4 &= 0 \\ (x+1)^2 &= -4 \end{aligned}$$

Dit geeft $x + 1 = \pm 2\,\mathrm{i}$ oftewel $x = -1 + 2\,\mathrm{i}$ of $x = -1 - 2\,\mathrm{i}$.

Waar het op neer komt, is dat je gewoon de bekende *abc*-formule kunt toepassen. De oplossingen van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ worden daarbij gegeven door

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Als de discriminant $b^2 - 4ac$ negatief is, is $4ac - b^2$ positief, en dan geldt dus $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(4ac - b^2)(-1)} = \sqrt{4ac - b^2}\,\mathrm{i}$. In het voorbeeld hierboven was $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$ en $b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$, en dus geldt inderdaad $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 4\,\mathrm{i}}{2} = -1 \pm 2\,\mathrm{i}$.

Bereken de volgende complexe getallen, teken ze in in het complexe vlak en bereken hun absolute waarde.

1.8

a. $(1-2\,\mathrm{i}\,)+(3-4\,\mathrm{i}\,)$
b. $2\,\mathrm{i}\,-(4-2\,\mathrm{i}\,)$
c. $(2-2\,\mathrm{i}\,)+(-1+2\,\mathrm{i}\,)$
d. $(4-6\,\mathrm{i}\,)-(1-3\,\mathrm{i}\,)$
e. $(2-\,\mathrm{i}\,)+(3-2\,\mathrm{i}\,)$

1.9

a. $(1-2\,\mathrm{i}\,)(3-4\,\mathrm{i}\,)$
b. $2\,\mathrm{i}\,(4-2\,\mathrm{i}\,)$
c. $(2-2\,\mathrm{i}\,)(2+2\,\mathrm{i}\,)$
d. $(1-3\,\mathrm{i}\,)^2$
e. $(2-\,\mathrm{i}\,)^2$

1.10

a. i^{3}
b. i^{4}
c. i^{5}
d. i^{10}
e. i^{2006}

1.11

a. $(-\,\mathrm{i}\,)^5$
b. $(2\,\mathrm{i}\,)^3$
c. $(-2\,\mathrm{i}\,)^7$
d. $(1+\,\mathrm{i}\,)^3$
e. $(1-\,\mathrm{i}\,)^3$

Alle complexe getallen z waarvoor geldt dat $\mathrm{Re}(z)=5$ vormen samen de verticale lijn $x=5$ in het complexe vlak. Teken de volgende lijnen in het complexe vlak.

1.12

a. $\mathrm{Re}(z)=4$
b. $\mathrm{Re}(z)=-3$
c. $\mathrm{Im}(z)=2$
d. $\mathrm{Im}(z)=-2$
e. $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z)$

1.13

a. $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=1$
b. $\mathrm{Re}(z)=2\,\mathrm{Im}(z)$
c. $\mathrm{Re}(z)-2\,\mathrm{Im}(z)=1$
d. $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=5$
e. $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)$

Alle complexe getallen z waarvoor geldt dat $|z|=5$ vormen samen de cirkel met straal 5 en middelpunt 0. Ga zelf na dat alle complexe getallen z waarvoor geldt dat $|z-1|=5$ samen de cirkel vormen met straal 5 en middelpunt 1. Teken nu de volgende cirkels in het complexe vlak en geef bij elke cirkel het middelpunt en de straal.

1.14

a. $|z|=4$
b. $|z-1|=3$
c. $|z-2|=2$
d. $|z-3|=1$
e. $|z+1|=5$

1.15

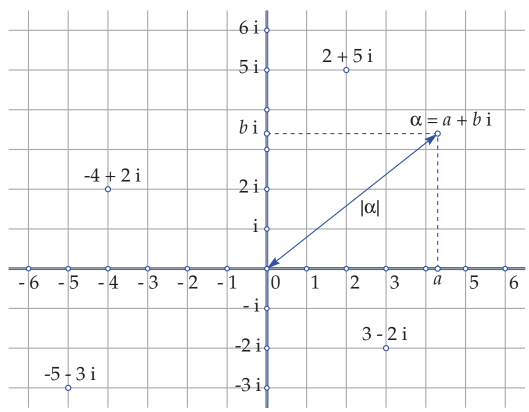
a. $|z+3|=4$
b. $|z-\,\mathrm{i}\,|=5$
c. $|z+2\,\mathrm{i}\,|=1$
d. $|z-1-\,\mathrm{i}\,|=3$
e. $|z+3-\,\mathrm{i}\,|=2$

Het complexe vlak

Bij het oplossen van vierkantsvergelijkingen zijn we nu ook getallen van de vorm $a + b\,\mathrm{i}$ tegengekomen. Ze heten *complexe getallen*. Bijvoorbeeld $-1+2\,\mathrm{i}$ of $3-5\,\mathrm{i}$. Je kunt zulke getallen bij elkaar *optellen*: $(-1+2\,\mathrm{i}) + (3-5\,\mathrm{i}) = 2-3\,\mathrm{i}$. Of van elkaar *aftrekken*: $(-1+2\,\mathrm{i}) - (3-5\,\mathrm{i}) = -4+7\,\mathrm{i}$. Of met elkaar *vermenigvuldigen*:

$$(-1+2\,\mathrm{i})(3-5\,\mathrm{i}) = -3+5\mathrm{i}+6\,\mathrm{i}-10\,\mathrm{i}^2 = -3+11\,\mathrm{i}+10 = 7+11\,\mathrm{i}.$$

Gewoon haakjes uitwerken dus, en gebruiken dat $\mathrm{i}^2 = -1$.
Een complex getal $a + b\,\mathrm{i}$ ligt helemaal vast door de *twee reële getallen a* en b. Reële getallen kun je voorstellen als punten op een lijn, de *reële getallenlijn*. Op net zo'n manier kun je complexe getallen voorstellen als punten in het vlak, het *complexe vlak*. Daarin moet dan eerst een coördinatenstelsel gekozen zijn. Het complexe getal $a + b\,\mathrm{i}$ hoort dan bij het punt met de coördinaten (a, b):



Voor de punten op de x-as is $b = 0$. In plaats van $a + 0\,\mathrm{i}$ schrijven we dan gewoon a. En voor de punten op de y-as geldt $a = 0$. Die schrijven we dan niet als $0 + b\,\mathrm{i}$ maar gewoon als $b\,\mathrm{i}$. En voor $1\,\mathrm{i}$ schrijven we natuurlijk gewoon i.

De x-as noemen we voortaan de *reële as* en de getallen daarop de *reële getallen*. De y-as heet de *imaginaire as* en de getallen daarop heten de *imaginaire getallen*. Complexe getallen worden vaak aangegeven met de letter z of met Griekse letters zoals α (alfa). We schrijven dan $z = x + y\,\mathrm{i}$ of $\alpha = a + b\,\mathrm{i}$.

Als $\alpha = a + b\,\mathrm{i}$ een complex getal is, heet a het *reële deel*, notatie $a = \mathrm{Re}(\alpha)$, en b het *imaginaire deel*, notatie $b = \mathrm{Im}(\alpha)$. Het imaginaire deel is dus een reëel getal! Het getal $\sqrt{a^2 + b^2}$ heet de *absolute waarde* van α, notatie $|\alpha|$. In plaats van absolute waarde wordt ook vaak het woord *modulus* gebruikt. De absolute waarde van α is de afstand van α tot de oorsprong (stelling van Pythagoras). (Als α een reëel getal is, is $|\alpha|$ dus de gewone absolute waarde van α.)

Bereken de volgende quotiënten van complexe getallen, dat wil zeggen schrijf elk quotiënt in de vorm $a + b\,\mathrm{i}$ met a en b reëel.

1.16

a. $\dfrac{1}{3 - 4\,\mathrm{i}}$

b. $\dfrac{3}{4 - 2\,\mathrm{i}}$

c. $\dfrac{2 - 2\,\mathrm{i}}{-1 + 2\,\mathrm{i}}$

d. $\dfrac{4 - 6\,\mathrm{i}}{1 - 3\,\mathrm{i}}$

e. $\dfrac{2 - \mathrm{i}}{3 - 2\,\mathrm{i}}$

1.17

a. $\dfrac{1 - 2\,\mathrm{i}}{3 + 4\,\mathrm{i}}$

b. $\dfrac{2\,\mathrm{i}}{1 - 2\,\mathrm{i}}$

c. $\dfrac{1}{\mathrm{i}}$

d. $\dfrac{1 - 3\,\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$

e. $\dfrac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$

1.18

a. $\dfrac{3\,\mathrm{i}}{4 + 3\,\mathrm{i}}$

b. $\dfrac{3 + \mathrm{i}}{1 - 2\,\mathrm{i}}$

c. $\dfrac{2 - \mathrm{i}}{-1 + 2\,\mathrm{i}}$

d. $\dfrac{2 - \mathrm{i}}{1 + 2\,\mathrm{i}}$

e. $\dfrac{1 + 2\,\mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}}$

1.19

a. $\dfrac{1 - 2\,\mathrm{i}}{4\,\mathrm{i}}$

b. $\dfrac{2 - \mathrm{i}}{3 + 2\,\mathrm{i}}$

c. $\dfrac{1 + \mathrm{i}}{4\,\mathrm{i}}$

d. $\dfrac{2 - \mathrm{i}}{-\mathrm{i}}$

e. $\dfrac{1 + 3\,\mathrm{i}}{3 - \mathrm{i}}$

Vermenigvuldigen en delen

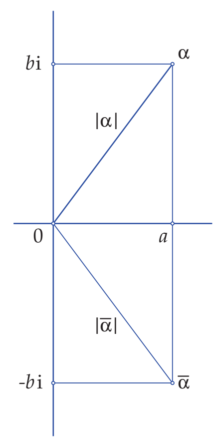
Vermenigvuldigen van complexe getallen is een kwestie van haakjes uitwerken en gebruik maken van $\mathrm{i}^2 = -1$. Je hebt er in de vorige paragraaf al mee geoefend. Dat gaat altijd als volgt:

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1\,\mathrm{i})(a_2 + b_2\,\mathrm{i}) &= a_1a_2 + a_1b_2\,\mathrm{i} + a_2b_1\,\mathrm{i} + b_1b_2\,\mathrm{i}^2 \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\,\mathrm{i}\end{aligned}$$

Delen is het omgekeerde van vermenigvuldigen. We zullen je een rekentruc leren om het quotiënt van twee complexe getallen snel en eenvoudig te berekenen. Eerst met een voorbeeld:

$$\frac{1-2\,\mathrm{i}}{2+3\,\mathrm{i}} = \frac{(1-2\,\mathrm{i})(2-3\,\mathrm{i})}{(2+3\,\mathrm{i})(2-3\,\mathrm{i})} = \frac{-4-7\,\mathrm{i}}{4-6\,\mathrm{i}+6\,\mathrm{i}-9\,\mathrm{i}^2} = \frac{-4-7\,\mathrm{i}}{13} = -\frac{4}{13} - \frac{7}{13}\,\mathrm{i}$$

We hebben bij de derde stap in de noemer het *reële* getal 13 gekregen, en daarmee konden we vervolgens het quotiënt uitrekenen, dat wil zeggen schrijven in de vorm $a + b\,\mathrm{i}$.



De truc bestaat blijkbaar uit het vermenigvuldigen van teller en noemer met *hetzelfde* complexe getal (daardoor verandert het quotiënt niet). Dat getal is de zogenaamde *geconjugeerde* van de noemer. De geconjugeerde van een complex getal $\alpha = a + b\,\mathrm{i}$ is het getal $a - b\,\mathrm{i}$, notatie $\overline{\alpha}$. Je krijgt $\overline{\alpha}$ door het teken van het imaginaire deel van α om te klappen. In plaats van het geconjugeerde complexe getal zegt men ook wel het *toegevoegd complexe getal* (dat is de letterlijke vertaling).
De bovenstaande truc werkt omdat daardoor in de noemer een getal komt van de vorm

$$\alpha\overline{\alpha} = (a + b\,\mathrm{i})(a - b\,\mathrm{i}) = a^2 - ab\,\mathrm{i} + ab\,\mathrm{i} - b^2\,\mathrm{i}^2 = a^2 + b^2$$

Dat is altijd een *positief reëel getal* (behalve als $a = b = 0$, maar dan is $\alpha = 0$, en ook bij complexe getallen kun je niet door 0 delen).

In de vorige paragraaf is de *absolute waarde* $|\alpha|$ van α gedefinieerd als $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Je ziet dus dat $\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2$ en ook dat $|\overline{\alpha}| = |\alpha|$.

Wat je van het bovenstaande moet onthouden, is eigenlijk alleen maar dit:

> *Bij vermenigvuldigen moet je haakjes uitwerken en gebruiken dat* $\mathrm{i}^2 = -1$.
> *Bij delen moet je teller en noemer vermenigvuldigen met de geconjugeerde van de noemer.*

Samenvatting

Complexe getallen zijn getallen van de vorm $\alpha = a + b\,\mathrm{i}$, waarbij a en b *reële* getallen zijn. Je kunt ze voorstellen als punten in het vlak waarin een coördinatenstelsel gekozen is. Het complexe getal $\alpha = a + b\,\mathrm{i}$ is dan het punt met coördinaten (a, b).

Terminologie en notaties:

Als $\alpha = a + b\,\mathrm{i}$ dan heet a het *reële deel* en b het *imaginaire deel* van α.
Als $\alpha = a + b\,\mathrm{i}$ dan heet $\overline{\alpha} = a - b\,\mathrm{i}$ de *complex geconjugeerde* van α.
Als $\alpha = a + b\,\mathrm{i}$ dan heet $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$ de *absolute waarde* of *modulus* van α. Dit is een niet-negatief reëel getal. Het is de afstand van het punt α tot de oorsprong.

In plaats van $\alpha = a + b\,\mathrm{i}$ schrijft men soms ook $\alpha = a + \mathrm{i}\,b$. Het imaginaire deel staat dan niet vóór de i, maar achter de i.

Rekenregels:

Optellen en aftrekken (coördinaatsgewijs):

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 &= (a_1 + b_1\,\mathrm{i}) + (a_2 + b_2\,\mathrm{i}) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,\mathrm{i} \\
\alpha_1 - \alpha_2 &= (a_1 + b_1\,\mathrm{i}) - (a_2 + b_2\,\mathrm{i}) &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\,\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Vermenigvuldigen:

$$\alpha_1\alpha_2 = (a_1 + b_1\,\mathrm{i})(a_2 + b_2\,\mathrm{i}) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\,\mathrm{i}$$

Dit is gemakkelijk te onthouden: haakjes uitwerken en gebruiken dat $\mathrm{i}^2 = -1$.
Bijzonder geval: $\alpha\overline{\alpha} = (a + b\,\mathrm{i})(a - b\,\mathrm{i}) = a^2 + b^2$. Gevolg: $\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2$.

Delen:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_1}{\alpha_2} &= \frac{\alpha_1\,\overline{\alpha_2}}{\alpha_2\,\overline{\alpha_2}} = \frac{(a_1 + b_1\,\mathrm{i})(a_2 - b_2\,\mathrm{i})}{(a_2 + b_2\,\mathrm{i})(a_2 - b_2\,\mathrm{i})} \\
&= \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (-a_1b_2 + a_2b_1)\,\mathrm{i}}{{a_2}^2 + {b_2}^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} + \frac{-a_1b_2 + a_2b_1}{{a_2}^2 + {b_2}^2}\,\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Ook dit is gemakkelijk te onthouden: teller en noemer vermenigvuldigen met de complex geconjugeerde van de noemer en vervolgens haakjes uitwerken.

Voor *reële* getallen (dat wil zeggen complexe getallen $a + b\,\mathrm{i}$ met $b = 0$) komen de rekenregels overeen met de 'gewone' regels voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. De complexe getallen vormen zo dus een *uitbreiding* van het systeem van de reële getallen met behoud van de gewone rekenregels. Je vindt de reële getallen op de horizontale as, die daarom ook de *reële as* heet. De verticale as heet de *imaginaire as*. De getallen daarop heten de *imaginaire getallen*.

2 De meetkunde van het complexe rekenen

In de eerste paragraaf van dit hoofdstuk leer je hoe je complexe getallen kunt zien als vectoren. De som en het verschil van twee complexe getallen zijn daarmee gemakkelijk meetkundig voor te stellen. Ook kun je zo op een eenvoudige manier cirkels beschrijven. Vervolgens leer je een nieuwe notatie voor complexe getallen, de (r, φ)-notatie, die verwant is aan poolcoördinaten. Met deze notatie worden ook de rekenregels voor vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen meetkundig voorstelbaar. Daarbij speelt een beroemde formule van Leonhard Euler een belangrijke rol. We sluiten dit hoofdstuk af met de behandeling van de complexe e-machtfunctie, de complexe sinus en de complexe cosinus.

2 De meetkunde van het complexe rekenen

2.1 Hieronder is steeds een tweetal complexe getallen α en β gegeven. Bereken telkens het complexe getal dat hoort bij de vector met α als beginpunt en β als eindpunt. Maak voor jezelf ter controle ook steeds een tekening.

a. $\alpha = \mathrm{i}\,, \beta = -2\,\mathrm{i}$
b. $\alpha = 1 - \mathrm{i}\,, \beta = -2$
c. $\alpha = -2 + 3\,\mathrm{i}\,, \beta = 1 - 2\,\mathrm{i}$
d. $\alpha = 4, \beta = -4$
e. $\alpha = 8\,\mathrm{i}\,, \beta = 8\,\mathrm{i}$

2.2 Teken bij elk van de onderdelen van de vorige opgave de vector die hoort bij het complexe getal $\alpha + \beta$. Neem daarbij de oorsprong als beginpunt.

2.3 Bepaal de vergelijking van de volgende cirkels en schrijf ze in de vorm

$$z\overline{z} - \overline{\alpha}z - \alpha\overline{z} + \alpha\overline{\alpha} - r^2 = 0$$

Voorbeeld: de cirkel met middelpunt $1 + \mathrm{i}$ en straal 2 heeft als vergelijking $(z - (1 + \mathrm{i}))(\overline{z} - (1 - \mathrm{i})) = 4$ en dit geeft na uitwerken

$$z\overline{z} - (1 - \mathrm{i})z - (1 + \mathrm{i})\overline{z} - 2 = 0$$

a. De cirkel met middelpunt i en straal 3
b. De cirkel met middelpunt $1 - \mathrm{i}$ en straal $\sqrt{2}$
c. De cirkel met middelpunt 1 en straal 1
d. De cirkel met middelpunt $-2 + \mathrm{i}$ en straal 2
e. De cirkel met middelpunt $1 - 2\,\mathrm{i}$ en straal 1

Niet elke vergelijking die er op het eerste gezicht uitziet als een cirkelvergelijking, stelt ook echt een cirkel voor. Neem bijvoorbeeld $z\overline{z} = -1$. Dat is geen cirkelvergelijking, want het linkerlid is voor elk complex getal z groter dan of gelijk aan nul. Er zijn dus geen complexe getallen z die hieraan voldoen.

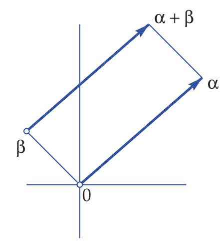
2.4 Ga na of de volgende vergelijkingen cirkels voorstellen. Zo ja, bepaal dan het middelpunt en de straal.

a. $z\overline{z} - \mathrm{i}\,z + \mathrm{i}\,\overline{z} = 0$
b. $z\overline{z} + (1 + \mathrm{i})z + (1 - \mathrm{i})\overline{z} = 2$
c. $z\overline{z} + 2\,\mathrm{i}\,z - 2\,\mathrm{i}\,\overline{z} + 4 = 0$
d. $z\overline{z} + 2z + 2\overline{z} + 5 = 0$
e. $z\overline{z} + (2 - \mathrm{i})z + (2 + \mathrm{i})\overline{z} - 1 = 0$

Complexe getallen als vectoren

Een vector in het vlak kun je je voorstellen als een pijl die van een *beginpunt* naar een *eindpunt* loopt. Evenwijdige pijlen met dezelfde richting en dezelfde grootte stellen dezelfde vector voor.

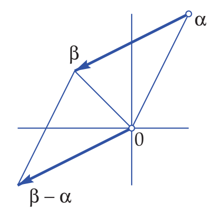
In het complexe vlak kun je bij elk complex getal α een vector maken door de pijl te tekenen die van de oorsprong naar het punt α loopt. Die vector kan dan ook worden voorgesteld door de pijl die van een willekeurig punt β naar het punt $\alpha+\beta$ loopt, want het punt $\alpha+\beta$ vormt samen met de punten 0, α en β een parallellogram (parallellogramconstructie van $\alpha+\beta$).



De vectorvoorstelling is handig als je het *verschil* $\beta-\alpha$ van twee complexe getallen α en β in beeld wilt brengen:

$\beta-\alpha$ is de vector (pijl) die van α naar β loopt.

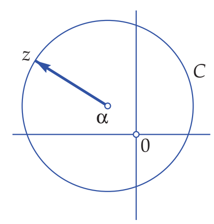
Let op: om het complexe getal $\beta-\alpha$ te vinden, moet je die pijl dus in de oorsprong laten beginnen. Voorbeeld: $\alpha = 1+2\,\mathrm{i}$, $\beta = -1+\mathrm{i}$ dus $\beta-\alpha = -2-\mathrm{i}$.



De vectorvoorstelling is ook handig bij het werken met cirkels. Als C een cirkel is met middelpunt α en straal r dan geldt dus voor elk punt z op C dat

$$|z-\alpha| = r$$

Je kunt je $z-\alpha$ voorstellen als de pijl die van α naar z loopt, en die moet dus lengte r hebben.



In de figuur hierboven is $\alpha = -1+\mathrm{i}$ genomen en $r = 3$. Die cirkel wordt dus gegeven door $|z-(-1+\mathrm{i})| = 3$, oftewel $|z+1-\mathrm{i}| = 3$.

Soms is het ook handig om niet met de absolute waarde te werken, maar gebruik te maken van $|w|^2 = w\overline{w}$ (zie bladzijde 9) met $w = z-\alpha$. Dan kun je de vergelijking van de cirkel C met middelpunt α en straal r dus schrijven als

$$(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha}) = r^2$$

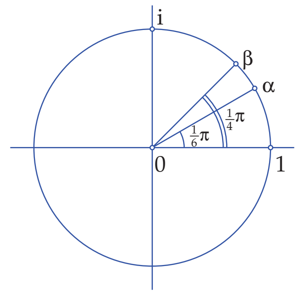
Bij de cirkel hierboven wordt dit dus $(z+1-\mathrm{i})(\overline{z}+1+\mathrm{i}) = 9$, ofwel, na haakjes uitwerken,

$$z\overline{z} + (1-\mathrm{i})\overline{z} + (1+\mathrm{i})z - 8 = 0$$

De *eenheidscirkel*, de cirkel met middelpunt 0 en straal 1, wordt gegeven door

$$z\overline{z} = 1$$

Van sommige hoeken hebben de sinus en de cosinus bekende exacte waarden. Zo geldt bijvoorbeeld dat $\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$ *en* $\cos\frac{1}{4}\pi = \sin\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ *(zie bladzijde 66). Dat betekent dat de punten* α *en* β *in de tekening hiernaast ook mooie exacte rechthoekige coördinaten hebben, namelijk* $\alpha = (\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ *en* $\beta = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$*. Wanneer je* α *en* β *als complexe getallen schrijft, krijg je dus*



$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i} \quad \textit{en} \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{i}$$

De punten in de volgende opgaven liggen ook allemaal op de eenheidscirkel. Teken ze en geef hun argument (in radialen) in de vorm $\varphi + 2k\pi$ (waarbij k een willekeurig geheel getal is). *Voorbeeld:* $\arg \mathrm{i} = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$.

2.5

a. $-\mathrm{i}$

b. -1

c. 1

d. $-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{i}$

e. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

2.6

a. $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{i}$

b. $\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$

c. $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{i}$

d. $-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$

e. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

Vermenigvuldigen of delen van complexe getallen op de eenheidscirkel doe je door de argumenten bij elkaar op te tellen of van elkaar af te trekken (zie de toelichting op de tegenoverliggende bladzijde). Gebruik dit bij de volgende opgaven. Maak ze dus op een *meetkundige* manier; werk geen haakjes uit!

2.7

a. $(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{i})^2$

b. $(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{i})^3$

c. $(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i})^3$

d. $(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i})^5$

e. $(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i})(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{i})^2$

2.8

a. $(-\mathrm{i})/(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i})$

b. $(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{i})^2/(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i})$

c. $(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{i})/(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i})^3$

d. $(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i})^6/(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i})$

e. $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i})^3/(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{i})^3$

Complexe getallen op de eenheidscirkel

Elk punt op de eenheidscirkel (de cirkel met straal 1 en de oorsprong als middelpunt) heeft in rechthoekige coördinaten uitgedrukt de vorm $(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Hierbij is φ de hoek die de voerstraal (de verbindingslijn met de oorsprong) maakt met de positieve x-as (φ is de Griekse letter 'phi'). We meten φ in radialen, tegen de klok in ($180°$ is gelijk aan π radialen). Die hoek is dan tot op gehele veelvouden van 2π na bepaald.

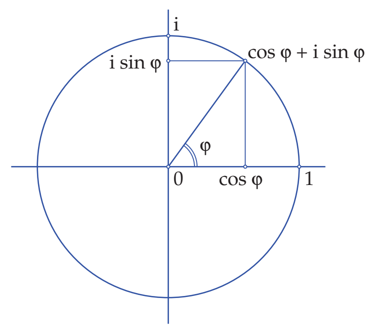
Als complex getal geschreven, is een punt op de eenheidscirkel dus altijd van de vorm

$$z = \cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi$$

Inderdaad geldt voor zo'n getal dat

$$|\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \sqrt{1} = 1$$

De hoek φ heet het *argument* van z, met als notatie $\varphi = \arg(z)$. Het argument is tot op gehele veelvouden van 2π na bepaald.



Wat gebeurt er als je twee van zulke getallen, bijvoorbeeld $z_1 = \cos\varphi_1 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_1$ en $z_2 = \cos\varphi_2 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_2$ met elkaar vermenigvuldigt? Dan is

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_2) \\ &= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \mathrm{i}\,(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) \end{aligned}$$

Maar volgens bekende gonioregels (zie bladzijde 67) is

$$\begin{aligned} \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 &= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \quad \text{en} \\ \cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2 &= \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{aligned}$$

en dus is

$$z_1 z_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Dit is dus weer een getal *op de eenheidscirkel* met als argument de som $\varphi_1 + \varphi_2$ van de argumenten van z_1 en z_2. Met andere woorden:

> *Het product $z_1 z_2$ van twee complexe getallen op de eenheidscirkel is weer een getal op de eenheidscirkel, en wel het getal dat als argument de som van de argumenten van z_1 en z_2 heeft.*

Voor het quotiënt van twee van zulke complexe getallen geldt:

> *Het quotiënt $\dfrac{z_1}{z_2}$ van twee complexe getallen op de eenheidscirkel is weer een getal op de eenheidscirkel, en wel het getal dat als argument het verschil van de argumenten van z_1 en z_2 heeft.*

Door $\varphi = \pi$ in te vullen in Eulers formule op de tegenoverliggende bladzijde krijg je

$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i\, 0 = -1$$

dus

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Ook dit is een beroemde formule van Euler. De vijf belangrijkste constanten uit de wiskunde, e, π, i, 1 en 0 worden erin verenigd. Bereken nu

2.9

a. $e^{-\pi i}$
b. $e^{2\pi i}$
c. $e^{\frac{1}{2}\pi i}$
d. $e^{3\pi i}$
e. $e^{4\pi i}$

2.10

a. $e^{-\frac{3}{2}\pi i}$
b. $e^{\frac{2}{3}\pi i}$
c. $e^{\frac{5}{2}\pi i}$
d. $e^{-\frac{13}{6}\pi i}$
e. $e^{2006\pi i}$

2.11

a. $e^{-\pi i} e^{\frac{2}{3}\pi i}$
b. $e^{3\pi i} e^{-2\pi i}$
c. $e^{\frac{1}{3}\pi i} e^{-\pi i}$
d. $\dfrac{e^{\frac{1}{2}\pi i}}{e^{\frac{3}{2}\pi i}}$
e. $\dfrac{e^{-\frac{1}{4}\pi i}}{e^{\frac{3}{4}\pi i}}$

2.12

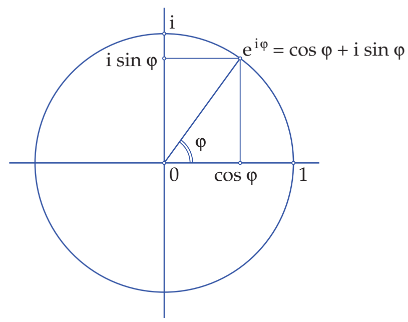
a. $\dfrac{e^{-\frac{3}{4}\pi i}}{e^{\frac{3}{4}\pi i}}$
b. $\dfrac{e^{\frac{2}{3}\pi i}}{e^{\frac{1}{6}\pi i}}$
c. $e^{\frac{5}{2}\pi i} e^{3\pi i}$
d. $\dfrac{e^{\frac{7}{6}\pi i}}{e^{\frac{2}{3}\pi i}}$
e. $\dfrac{e^{\pi i}}{e^{4\pi i}}$

De formules van Euler

Halverwege de achttiende eeuw bewees de grote wiskundige Leonhard Euler de formule

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Wij gaan hier niet op Eulers argumenten in, maar presenteren deze formule op dit moment gewoon als een definitie, of, zo je wilt, als een *verkorte notatie.* In plaats van $\cos\varphi + i\sin\varphi$ schrijven we voortaan $e^{i\varphi}$ (of $e^{\varphi i}$). Let op: het is niet de bekende, reële e-machtfunctie die hier staat, want de exponent $i\varphi$ is geen reeel getal, maar een *imaginair* getal. En natuurlijk zit er meer achter: later zullen we e^{z} voor willekeurige complexe getallen z definiëren (bladzijde 21).



In de vorige paragraaf hebben we afgeleid dat

$$(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)$$

In de nieuwe notatie ziet dat er een stuk overzichtelijker uit:

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Net als bij gewone e-machten geldt dus ook hier: *bij het vermenigvuldigen van imaginaire* e*-machten worden de exponenten bij elkaar opgeteld.* En natuurlijk geldt ook:

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Bij het delen van imaginaire e*-machten worden de exponenten van elkaar afgetrokken.*

Als je in de eerste formule van deze paragraaf $-\varphi$ in plaats van φ invult, krijg je

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

Tel je de twee formules bij elkaar op, dan krijg je $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi$ oftewel

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

Trek je ze van elkaar af, dan krijg je $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi$ oftewel

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Ook deze twee beroemde formules zijn van Euler afkomstig.

Schrijf de volgende complexe getallen in de (r, φ)-notatie. Gebruik daarbij de arctangensfunctie (inverse tangens) op een rekenmachine. Werk in radialen en geef je antwoord in 4 decimalen nauwkeurig.

2.13
a. $1 + 2\,\mathrm{i}$
b. $4 - 2\,\mathrm{i}$
c. $2 - 3\,\mathrm{i}$
d. $-2 - 3\,\mathrm{i}$
e. -3

2.14
a. $2 + \mathrm{i}$
b. $2 - \mathrm{i}$
c. $-\mathrm{i}$
d. $-5 + \mathrm{i}$
e. $-3\,\mathrm{i}$

2.15 Schrijf de volgende complexe getallen in de notatie $z = x + \mathrm{i}\,y$. Gebruik daarbij een rekenmachine en geef je antwoord in 4 decimalen nauwkeurig.
a. $2\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}}$
b. $3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}}$
c. $0.2\mathrm{e}^{0.3\,\mathrm{i}}$
d. $1.2\mathrm{e}^{2.5\,\mathrm{i}}$
e. $\mathrm{e}^{3.1415\,\mathrm{i}}$

2.16 In deze opgave is $z = 3\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}}$. Geef nu ook de volgende getallen in de (r, φ)-notatie:
a. $\overline{z}$
b. z^2
c. $(\overline{z})^5$
d. $\dfrac{1}{z}$
e. z^n (n geheel)

2.17 Gegeven zijn de complexe getallen $z_1 = 2\mathrm{e}^{5\,\mathrm{i}}$ en $z_2 = 3\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}}$. Laat met behulp van de (r, φ)-notatie zien dat

a. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\;\overline{z_2}$
b. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

2.18 Toon nu algemeen met behulp van de (r, φ)-notatie aan dat voor alle complexe getallen $z_1 = r_1\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi_1}$ en $z_2 = r_2\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi_2}$ geldt dat

a. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\;\overline{z_2}$
b. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Hint: ga op dezelfde manier te werk als bij de vorige opgave, maar laat nu letters staan in plaats van getallen.

De (r, φ)-notatie voor complexe getallen

Elk complex getal $z = x + \mathrm{i}\, y$ kun je schrijven in de vorm

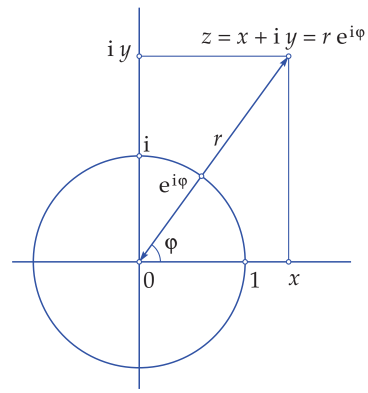
$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi)$$

waarin $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ de absolute waarde van z, en $\varphi = \arg(z)$ het argument van z is, dat wil zeggen de hoek die de voerstraal (de verbindingslijn van z met de oorsprong) met de positieve x-as maakt. Hierbij geldt $x = r\,\cos\varphi$ en $y = r\,\sin\varphi$.

De verkorte notatie uit de vorige paragraaf geeft

$$z = r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}$$

Men noemt dit wel de (r, φ)-*notatie* of *polaire notatie* (omdat ze verwant is met poolcoördinaten).
De (r, φ)-notatie is bijzonder handig bij het vermenigvuldigen en delen:



$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi_1}\, r_2\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi_2} = r_1 r_2\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\varphi_1+\varphi_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi_1}}{r_2\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\varphi_1-\varphi_2)} \end{aligned}$$

Bij vermenigvuldigen worden de absolute waarden met elkaar vermenigvuldigd en de argumenten bij elkaar opgeteld. Bij delen worden de absolute waarden gedeeld en de argumenten van elkaar afgetrokken.

Voor het verband tussen x, y, r en φ geldt

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

Hiermee kun je de gewone notatie $z = x + \mathrm{i}\,y$ van een complex getal z omzetten in de (r, φ)-notatie $z = r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}$ en omgekeerd. Er zitten echter een paar addertjes onder het gras bij de berekening van φ als je x en y kent. In de eerste plaats is φ niet gedefinieerd als $x = y = 0$. Verder geldt: als $x = 0$, $y > 0$ dan is $\varphi = \frac{\pi}{2}$, en als $x = 0$, $y < 0$ dan is $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. In alle andere gevallen kun je φ berekenen met behulp van de arctangens-functie (de inverse van de tangens). Maar let op: de arctangens geeft altijd een uitkomst tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$. Voor getallen $z = x + \mathrm{i}\,y$ in het linkerhalfvlak (dat wil zeggen met $x < 0$) moet je daar dan nog π bij optellen:

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} + 2k\pi \ \text{ als } x > 0 \qquad \text{en} \qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x} + \pi + 2k\pi \ \text{ als } x < 0$$

Bedenk dat het argument tot op gehele veelvouden van 2π na bepaald is.

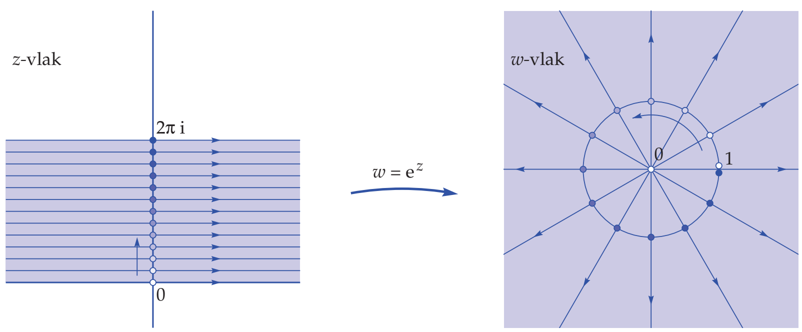
Schrijf de volgende complexe getallen in de notatie $z = x + \mathrm{i}\,y$. Gebruik daarbij een rekenmachine en geef je antwoord in 4 decimalen nauwkeurig.

2.19
a. $e^{2+2\,\mathrm{i}}$
b. $e^{3-\mathrm{i}}$
c. $e^{0.2+0.3\,\mathrm{i}}$
d. $e^{1.2+2.5\,\mathrm{i}}$
e. $e^{-0.5+3.14\,\mathrm{i}}$

2.20
a. $e^{-3+\mathrm{i}}$
b. $e^{3-0.5\,\mathrm{i}}$
c. $e^{-2-3\,\mathrm{i}}$
d. $e^{-1+5\,\mathrm{i}}$
e. $e^{0.8+3\,\mathrm{i}}$

2.21
a. $\cos(\mathrm{i})$
b. $\cos(\pi + \mathrm{i})$
c. $\sin(-2\,\mathrm{i})$
d. $\sin(-2 - 3\,\mathrm{i})$
e. $\sin(4\pi - 2 - 3\,\mathrm{i})$

In de volgende opgave ga je de functie $w = e^z$ in kaart brengen aan de hand van de onderstaande figuur. Van zo'n complexe functie kun je niet gemakkelijk een grafiek tekenen, want zowel de z-waarden (de originelen) als de w-waarden (de functiewaarden) bevinden zich in een vlak. Voor een 'grafiek' zou je dus iets vierdimensionaals moeten tekenen, en dat kunnen we niet. In plaats daarvan tekenen we twee complexe vlakken naast elkaar, een z-vlak en een w-vlak, en we geven daarin aan welke w-waarden bij welke z-waarden horen. We hebben al een begin gemaakt.



2.22

a. Ga na dat het verticale deel $0 \leq y \leq 2\pi$ van de y-as in het z-vlak op de aangegeven wijze wordt afgebeeld op de eenheidscirkel in het w-vlak.
b. De beelden van $z = 0$ en $z = 2\pi\,\mathrm{i}$ zijn in het w-vlak niet helemaal correct getekend. Wat is er mis, en waarom zijn ze toch zo getekend?
c. In het z-vlak is in de blauwe strook een aantal horizontale lijnen getekend. Ga precies na waarop die terecht komen in het w-vlak.
d. Is er een punt z dat afgebeeld wordt op de oorsprong in het w-vlak? Zo ja, welk punt, zo nee, waarom niet?
e. Bepaal de beelden van de verticale lijnstukken $x = 1, 0 \leq y \leq 2\pi$ en $x = -1$, $0 \leq y \leq 2\pi$ in het z-vlak.
f. Wat is het beeld van de gehele y-as?
g. Bereken alle z die afgebeeld worden op $w = \mathrm{i}$ in het w-vlak.

De complexe functies e^z, $\cos z$ en $\sin z$

Je kent de reële e-machtfunctie e^x en je weet dat

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

Daarmee ken je dus de functie e^z voor alle z-waarden die *zuiver reëel* zijn en alle z-waarden die *zuiver imaginair* zijn. Voor willekeurige complexe getallen $z = x + iy$ definiëren we nu

$$e^z = e^x e^{iy}$$

Met deze definitie geldt voor alle complexe getallen z_1 en z_2 dat $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ want

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1} e^{x_2} e^{iy_1} e^{iy_2} \\ &= e^{x_1} e^{iy_1} e^{x_2} e^{iy_2} = e^{x_1+iy_1} e^{x_2+iy_2} = e^{z_1} e^{z_2} \end{aligned}$$

Voor alle gehele getallen k geldt $e^{2k\pi i} = 1$, dus

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z$$

Met andere woorden: *de functie* e^z *is periodiek met periode* $2\pi i$. Verder zie je dat $|e^z| = e^x$ en dat $\arg(e^z) = y + 2k\pi$ want $e^x e^{iy}$ is niets anders dan de polaire notatie voor e^z met $r = e^x$.

Met behulp van de formules van Euler kunnen we nu ook de cosinus en de sinus voor willekeurige complexe getallen z definiëren:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{en} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Uit het feit dat de e-macht periodiek is met periode $2\pi i$ volgt dan direct dat de cosinus en de sinus *periodiek zijn met periode* 2π, precies zoals je verwacht:

$$\cos(z + 2k\pi) = \cos z \quad \text{en} \quad \sin(z + 2k\pi) = \sin z \quad \text{voor alle gehele } k$$

Zonder bewijs of nadere toelichting vermelden we nog dat de functies e^z, $\cos z$ en $\sin z$ ook *gedifferentieerd* kunnen worden, en dat de bekende regels en formules ook in het complexe geval geldig blijven. Zo geldt

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$$

met andere woorden: *de e-machtfunctie is gelijk aan zijn eigen afgeleide*.

Hieruit kun je met behulp van de somregel en de kettingregel ook de geldigheid afleiden van de bekende formules

$$\frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z \quad \text{en} \quad \frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z$$

Samenvatting

Je kunt complexe getallen zien als *vectoren*: het complexe getal α hoort bij de vector (pijl) die van de oorsprong naar het punt α in het complexe vlak loopt. Pijlen met dezelfde grootte en richting stellen dezelfde vector voor. Optellen van complexe getallen correspondeert met de *vectoroptelling* (parallellogramconstructie).

Het complexe getal $\beta - \alpha$ hoort bij de vector die loopt van α naar β.

De cirkel met middelpunt α en straal r wordt gegeven door de vergelijking

$$(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha}) = r^2$$

Formules van Euler:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

De *(r,φ)-notatie (polaire notatie)* van een complex getal $z = x + iy$ is $z = re^{i\varphi}$. Hierbij is $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ en $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Het getal r heet de *absolute waarde* of *modulus* van z, en φ heet het *argument* van z, notatie $\varphi = \arg(z)$. Het argument wordt gemeten in radialen. Het is tot op gehele veelvouden van 2π na bepaald.

Als $x \neq 0$ dan is $\tan\varphi = y/x$ en dan kan φ als volgt uit x en y berekend worden

$$\begin{array}{llll} \text{als} & x > 0 & \text{dan is} & \varphi = \arctan\frac{y}{x} + 2k\pi \\ \text{als} & x < 0 & \text{dan is} & \varphi = \arctan\frac{y}{x} + \pi + 2k\pi \end{array}$$

Bij vermenigvuldigen van complexe getallen worden de absolute waarden met elkaar vermenigvuldigd en de argumenten bij elkaar opgeteld. Bij delen worden de absolute waarden gedeeld en de argumenten van elkaar afgetrokken.

De *complexe e-macht*:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Er geldt $|e^z| = e^x$ en $\arg(e^z) = y + 2k\pi$. De complexe e-macht is periodiek met periode $2\pi i$.

De *complexe cosinus* en de *complexe sinus*:

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

De complexe cosinus en de complexe sinus zijn periodiek met periode 2π.

3 Wortels en polynomen

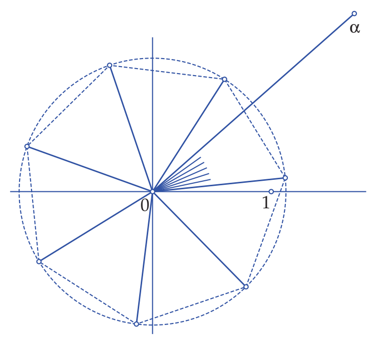
In dit hoofdstuk maak je kennis met complexe wortels en complexe polynomen. Je leert dat elk complex getal precies n complexe n-demachtswortels heeft, en bovendien dat die wortels in het vlak de hoekpunten vormen van een regelmatige n-hoek met de oorsprong als middelpunt. Je leert vervolgens wat complexe n-degraadspolynomen en complexe n-degraadsvergelijkingen zijn. De *hoofdstelling van de algebra* zegt dat elke complexe n-degraadsvergelijking precies n oplossingen heeft, mits je ze op de juiste manier telt. Tot slot leer je dat elk reëel n-degraadspolynoom gesplitst kan worden in reële lineaire factoren en reële kwadratische factoren met een negatieve discriminant.

3 Wortels en polynomen

Bepaal alle hieronder gegeven n-demachtswortels in de (r, φ)-notatie (voor elke n-demachtswortel zijn er n mogelijkheden). Geef exacte antwoorden of antwoorden in vier decimalen nauwkeurig. Geef telkens ook met een tekening aan hoe die n-demachtswortels de hoekpunten vormen van een regelmatige n-hoek met de oorsprong als centrum.

Als *voorbeeld* zijn hieronder de zeven zevendemachtswortels $\sqrt[7]{\alpha}$ getekend voor $\alpha = 1.7 + 1.5\,\mathrm{i}$. Hiervoor geldt $|\alpha| \approx 2.2672$ en $\arg(\alpha) \approx 0.7230 + 2k\pi$ zodat $|\sqrt[7]{\alpha}| = \sqrt[7]{|\alpha|} \approx 1.1240$ en $\arg(\sqrt[7]{\alpha}) = \frac{1}{7}\arg(\alpha) \approx 0.1033 + \frac{2k\pi}{7}$ dus

$$\sqrt[7]{\alpha} \approx 1.1240\,\mathrm{e}^{(0.1033 + \frac{2k\pi}{7})\,\mathrm{i}} \qquad \text{voor} \qquad k = 0, 1, \ldots, 6$$



3.1
- a. $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$
- b. $\sqrt[3]{-\mathrm{i}}$
- c. $\sqrt[3]{1}$
- d. $\sqrt[3]{8}$
- e. $\sqrt[3]{8\,\mathrm{i}}$

3.2
- a. $\sqrt[3]{1+\mathrm{i}}$
- b. $\sqrt[3]{-27}$
- c. $\sqrt[3]{-27\,\mathrm{i}}$
- d. $\sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$
- e. $\sqrt[2]{4}$

3.3
- a. $\sqrt[4]{-1}$
- b. $\sqrt[4]{-\mathrm{i}}$
- c. $\sqrt[5]{1}$
- d. $\sqrt[4]{3-4\,\mathrm{i}}$
- e. $\sqrt[6]{6\,\mathrm{i}}$

3.4
- a. $\sqrt[4]{1-\mathrm{i}}$
- b. $\sqrt[5]{-32}$
- c. $\sqrt[4]{81\,\mathrm{i}}$
- d. $\sqrt[7]{2\,\mathrm{i}}$
- e. $\sqrt[3]{3+3\,\mathrm{i}}$

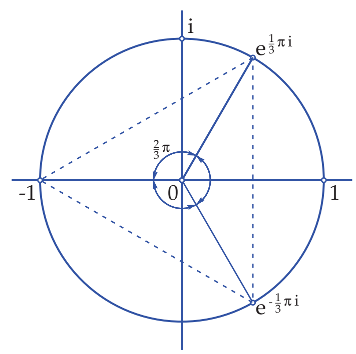
Wat zijn complexe n-demachtswortels?

We weten al dat $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$ want $\mathrm{i}^2 = -1$. Of eigenlijk zouden we beter kunnen zeggen dat $\sqrt{-1} = \pm\,\mathrm{i}$ want ook $(-\mathrm{i})^2 = -1$. Maar wat zou $\sqrt[3]{-1}$ zijn? Het moet een complex getal z zijn waarvoor geldt dat $z^3 = -1$. Kennen we zulke getallen? Jazeker, $z = -1$ voldoet, want $(-1)^3 = -1$. Maar ook $z = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}}$ voldoet, want

$$z^3 = \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}}\right)^3 = \mathrm{e}^{3(\frac{1}{3}\pi\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = -1$$

En natuurlijk voldoet ook $z = \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}}$ want daarvoor geldt dat $z^3 = \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}} = -1$.

We vinden dus *drie* complexe getallen z waarvoor geldt dat $z^3 = -1$. Alledrie kunnen ze aanspraak maken op de titel $\sqrt[3]{-1}$. Anders dan bij de reële wortels maken we in de wiskunde van de complexe getallen geen afspraken over een voorkeursbehandeling voor een van die drie wortels. Dat blijkt namelijk om allerlei redenen niet handig te zijn. Als we dus in het vervolg $\sqrt[3]{-1}$ opschrijven, moet uit de context duidelijk zijn welke van de drie wortels we bedoelen.



De voerstralen van de drie derdemachtswortels van -1 maken onderling hoeken van $\frac{2}{3}\pi$. De wortels zelf zijn de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek met de oorsprong als centrum. Waarom dat zo is, wordt duidelijk als we de bepaling van $\sqrt[3]{-1}$ nog wat beter bekijken.

We zoeken complexe getallen $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ waarvoor $z^3 = -1$. Maar $z^3 = \left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^3 = r^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi}$ en dat moet gelijk zijn aan -1. Omdat $|-1| = 1$ en $\arg(-1) = \pi + 2k\pi$ moet $r^3 = 1$ zijn en $3\varphi = \pi + 2k\pi$. Hieruit volgt $r = 1$ (want r is een *reëel* getal dat niet-negatief is) en $\varphi = \frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}k\pi$. Voor $k = 0$, $k = 1$ en $k = 2$ krijgen we

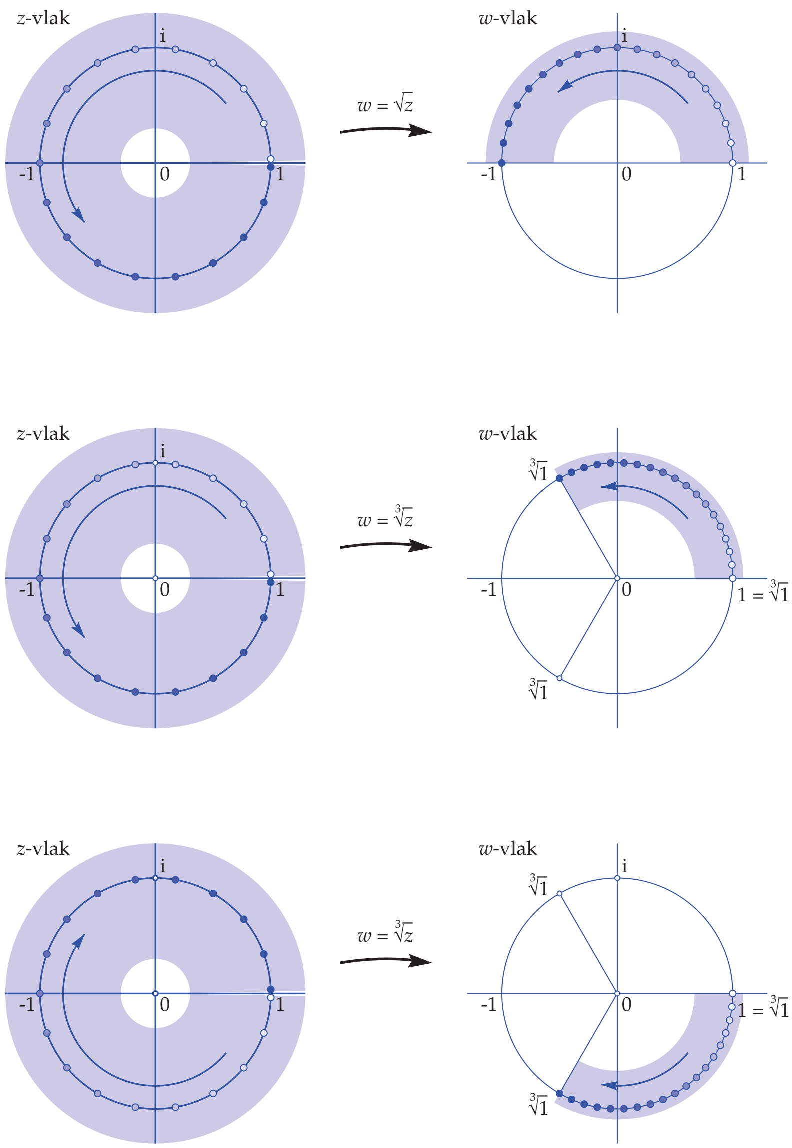
$$z = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}}, \quad z = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = -1, \quad z = \mathrm{e}^{\frac{5}{3}\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}}$$

Voor alle andere gehele waarden van k krijgen we ook weer één van deze drie wortels. Je ziet dat het argument telkens met $\frac{2}{3}\pi$ toeneemt, en na drie stappen ben je weer op je uitgangspunt terug. Je kunt dit in het algemeen doen voor de derdemachtswortel uit een willekeurig complex getal $\alpha \neq 0$: in alle gevallen vind je *drie* derdemachtswortels, en hun voerstralen maken onderling hoeken van $\frac{2}{3}\pi$.

Nog algemener, nu voor een willekeurig positief geheel getal n:

Elk complex getal $\alpha = r\,e^{\mathrm{i}\varphi}$ met $r = |\alpha| > 0$ heeft precies n n-demachtswortels, namelijk

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{n}\varphi + \frac{2k\pi}{n})\mathrm{i}} \qquad \text{voor} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$


z-vlak
i
-1
0
1
$w = \sqrt{z}$
w-vlak
i
-1
0
1
z-vlak
i
-1
0
1
$w = \sqrt[3]{z}$
w-vlak
$\sqrt[3]{1}$
-1
0
$1 = \sqrt[3]{1}$
$\sqrt[3]{1}$
z-vlak
i
-1
0
1
$w = \sqrt[3]{z}$
w-vlak
i
$\sqrt[3]{1}$
-1
0
$1 = \sqrt[3]{1}$
$\sqrt[3]{1}$

Waarom wortels meerwaardig zijn

In de vorige paragraaf hebben we de n-demachtswortel uit een complex getal α gedefinieerd als

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{r}\, \mathrm{e}^{\,(\frac{1}{n}\varphi + \frac{2k\pi}{n})\,\mathrm{i}} \qquad \text{voor} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

waarbij er dus (tenzij $\alpha = 0$) precies n verschillende mogelijkheden voor zo'n wortel zijn. Bij de gewone vierkantswortel uit een positief reëel getal, bijvoorbeeld $\sqrt{4}$, zijn er in principe ook 2 mogelijkheden, namelijk 2 en -2, maar binnen de reële getallen hebben we de vaste afspraak dat we onder $\sqrt{4}$ altijd de *positieve* wortel verstaan, dus $\sqrt{4} = 2$.

Waarom doen we bij de complexe wortels niet ook iets dergelijks? Je zou hier toch ook heel goed een afspraak kunnen maken, bijvoorbeeld: kies altijd de wortel met een minimaal niet-negatief argument. De reden dat zoiets niet gedaan wordt, is dat die complexe wortels vaak gebruikt worden als functies of onderdelen van functies, en dat je bij het gebruik van zulke functies alleen maar last zou hebben van een dergelijke afspraak. Hieronder lichten we dat toe aan de hand van enige voorbeelden.

Neem eerst functie $w = \sqrt{z}$. Een 'grafiek' van zo'n functie kun je niet zó maar maken, want zowel de z-waarden als de functiewaarden bevinden zich in een vlak, dus voor een grafiek zou je vier dimensies nodig hebben. In plaats daarvan werken we met een z-vlak en een w-vlak naast elkaar. Hiernaast zie je in de bovenste figuur zo'n illustratie. We bekijken de wortelfunctie $w = \sqrt{z}$ op een ringgebied om de eenheidscirkel in het z-vlak, waarbij we z laten beginnen in 1 en vervolgens tegen de klok in langs de eenheidscirkel laten lopen. Als we $\sqrt{1} = 1$ kiezen in het beginpunt, loopt $\sqrt{w}$ vanaf $w = 1$ ook langs de eenheidscirkel, maar met de halve snelheid want in dit geval is

$$w = \sqrt{z} = \sqrt{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}} = \left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}\right)^{1/2} = \mathrm{e}^{\,\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,\varphi}$$

Na één volledige omloop in het z-vlak is $w = \sqrt{z}$ in het w-vlak dus bij de *andere* wortel aangekomen, met andere woorden, nu geldt $\sqrt{1} = -1$. Zouden we nu een vaste afspraak voor de betekenis van $\sqrt{z}$ hebben, dan zouden we onderweg ergens een sprong in de functiewaarden moeten maken, en dat is gekunsteld.

Hetzelfde doet zich voor bij ieder pad in het z-vlak dat één maal rond de oorsprong loopt: je komt dan altijd van de ene 'tak' van de wortel op de andere terecht. De oorsprong heet daarom een *vertakkingspunt*.

Voor hogeremachtwortels geldt iets dergelijks. Hiernaast is aangegeven hoe je bij de functie $w = \sqrt[3]{z}$ door in het z-vlak één maal om de oorsprong te lopen van $\sqrt[3]{1} = 1$ bij $\sqrt[3]{1} = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,/3}$ komt (tegen de klok in) of bij $\sqrt[3]{1} = \mathrm{e}^{\,-2\pi\,\mathrm{i}\,/3}$ (met de klok mee). Ook hier zou een vaste afspraak voor $\sqrt[3]{z}$ alleen maar lastig zijn.

Bepaal een tweedegraadspolynoom van de vorm $p(z) = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$ dat de getallen z_1 en z_2 als nulpunten heeft, waarbij

3.5

a. $z_1 = 1, z_2 = -1$
b. $z_1 = 1, z_2 = 5$
c. $z_1 = 1, z_2 = \mathrm{i}$
d. $z_1 = \mathrm{i}, z_2 = -2\mathrm{i}$
e. $z_1 = 1 + \mathrm{i}, z_2 = 1 - \mathrm{i}$

3.6

a. $z_1 = 0, z_2 = -\mathrm{i}$
b. $z_1 = 1, z_2 = 2$
c. $z_1 = 0, z_2 = -2\mathrm{i}$
d. $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}, z_2 = 1 - 2\mathrm{i}$
e. $z_1 = 1 + \mathrm{i}, z_2 = -1 + \mathrm{i}$

Bepaal een derdegraadspolynoom van de vorm $p(z) = z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$ met z_1, z_2 en z_3 als nulpunten waarbij

3.7

a. $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = 0$
b. $z_1 = \mathrm{i}, z_2 = -\mathrm{i}, z_3 = 0$
c. $z_1 = \mathrm{i}, z_2 = -\mathrm{i}, z_3 = 1$
d. $z_1 = \mathrm{i}, z_2 = 2\mathrm{i}, z_3 = 3\mathrm{i}$
e. $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = \mathrm{i}$

3.8

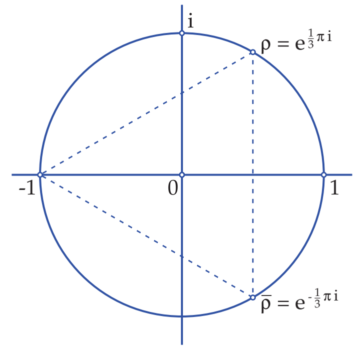
a. $z_1 = 1, z_2 = 2, z_3 = 3$
b. $z_1 = 1 + \mathrm{i}, z_2 = 1 - \mathrm{i}, z_3 = 1$
c. $z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = 2$
d. $z_1 = \mathrm{i}, z_2 = 0, z_3 = 1$
e. $z_1 = \mathrm{i}, z_2 = -\mathrm{i}, z_3 = 2\mathrm{i}$

Over n-demachtswortels en n-degraadspolynomen

We hebben gezien dat er drie derdemachtswortels uit -1 zijn, namelijk -1, $e^{\frac{1}{3}\pi i}$ en $e^{-\frac{1}{3}\pi i}$. Voor het gemak schrijven we nu $\rho = e^{\frac{1}{3}\pi i}$ en $\overline{\rho} = e^{-\frac{1}{3}\pi i}$ (ρ is de Griekse letter 'rho'). De drie wortels zijn dan dus -1, ρ en $\overline{\rho}$.

De derdemachtswortels uit -1 zijn de complexe getallen z waarvoor geldt dat $z^3 = -1$, met andere woorden, het zijn de oplossingen van de *derdegraadsvergelijking*

$$z^3 + 1 = 0$$



Nog weer anders gezegd, het zijn de *nulpunten* van het *derdegraadspolynoom* $z^3 + 1$. Maar bekijk nu eens de vergelijking

$$(z - (-1))(z - \rho)(z - \overline{\rho}) = 0$$

Het is duidelijk dat de oplossingen hiervan ook gelijk zijn aan -1, ρ en $\overline{\rho}$. Zou het linkerlid misschien gelijk zijn aan $z^3 + 1$?
Werk de haakjes uit:

$$(z - (-1))(z - \rho)(z - \overline{\rho}) = (z + 1)(z^2 - (\rho + \overline{\rho})z + \rho\overline{\rho})$$

Maar $\rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$ dus $\rho + \overline{\rho} = 1$ en $\rho\overline{\rho} = 1$ (ga na!), zodat inderdaad

$$(z+1)(z^2 - (\rho + \overline{\rho})z + \rho\overline{\rho}) = (z+1)(z^2 - z + 1) = z^3 - z^2 + z + z^2 - z + 1 = z^3 + 1$$

Wat we in dit bijzondere geval gezien hebben, blijkt in het algemeen te gelden:

Als een n-degraadspolynoom

$$p(z) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

n verschillende nulpunten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ heeft, dan kan $p(z)$ geschreven worden als

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$$

In het bovenstaande voorbeeld was $p(z) = z^3 + 1$ en $z_1 = -1$, $z_2 = \rho$, $z_3 = \overline{\rho}$. In de vorige paragraaf hebben we telkens de n-demachtswortels van een getal α bepaald. Het bijbehorende polynoom was dan telkens van de vorm $p(z) = z^n - \alpha$. We hebben gezien dat er dan inderdaad steeds n nulpunten (de n-demachtwortels) zijn, behalve in het flauwe geval dat $\alpha = 0$. Hoe het in het algemeen zit bij een n-degraadspolynoom, behandelen we in de volgende paragraaf.

3.9 Hieronder zijn telkens een polynoom $p(z)$ en een getal α gegeven. Ga na dat steeds geldt dat $p(\alpha) = 0$ en bepaal vervolgens het polynoom $q(z)$ waarvoor geldt dat $p(z) = (z - \alpha)q(z)$.

a. $p(z) = z^4 - z^3 - 2z^2, \quad \alpha = -1$
b. $p(z) = z^4 - z^3 + 3z^2 - 3z, \quad \alpha = 1$
c. $p(z) = z^5 - \mathrm{i}\,z^4 - z + \mathrm{i}\,, \quad \alpha = \mathrm{i}$
d. $p(z) = z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 4, \quad \alpha = 2$
e. $p(z) = z^4 - 1, \quad \alpha = -\mathrm{i}$
f. $p(z) = z^4 + 2z^2 + 1, \quad \alpha = \mathrm{i}$

Hint: Je kunt de bovenstaande opgaven gewoon oplossen door systematisch proberen, maar degenen die weten wat een *staartdeling* is, zullen merken dat het daarmee wel zo gemakkelijk gaat. Als voorbeeld geef ik hierbij de staartdeling die hoort bij het geval $p(z) = 3z^4 - 7z^3 + 3z^2 - z - 2$ en $\alpha = 2$. Invullen laat zien dat $\alpha = 2$ een nulpunt is, dat wil zeggen dat $p(2) = 0$. De volgende staartdeling geeft je het quotiëntpolynoom $q(z) = 3z^3 - z^2 + z + 1$.

$$\begin{array}{rl}
z-2\ / & 3z^4-7z^3+3z^2 \quad -z-2 \ \backslash\ 3z^3-z^2+z+1\\
& \underline{3z^4-6z^3}\\
& \quad -z^3+3z^2\\
& \quad \underline{-z^3+2z^2}\\
& \qquad\qquad z^2-z\\
& \qquad\qquad \underline{z^2-2z}\\
& \qquad\qquad\qquad z-2\\
& \qquad\qquad\qquad \underline{z-2}\\
& \qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

3.10 Onderzoek bij elk van de onderdelen van de vorige opgave de multipliciteit van het nulpunt α en bepaal vervolgens ook de andere nulpunten van het polynoom $p(z)$.

De hoofdstelling van de algebra

Voordat we verder gaan, geven we eerst een formele definitie van de term polynoom en een aantal daarmee verband houdende veel gebruikte termen.

> **Definitie:** Een *polynoom* (Engels: *polynomial*) is een functie van de vorm $p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$. De complexe getallen $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$ heten de *coëfficiënten*, en het complexe getal z heet de *variabele*. We veronderstellen altijd dat $\alpha_n \neq 0$ (want anders kun je de term $\alpha_n z^n$ beter weglaten). De andere coëfficiënten kunnen wél nul zijn. Het getal n heet de *graad* van het polynoom. In plaats van polynoom wordt ook wel *veelterm* gebruikt.

Bij elk complex getal z geeft zo'n polynoom een complex getal $p(z)$ als *functiewaarde*. Als voor een zekere z_0 geldt dat $p(z_0) = 0$ dan heet z_0 een *nulpunt* van het polynoom. Het getal z_0 is dan een *oplossing* van de vergelijking

$$\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0$$

Zo'n vergelijking heet een *n-degraadsvergelijking*. In plaats van een oplossing van de vergelijking zegt men ook wel een *wortel* van de vergelijking, zelfs al komen er in de schrijfwijze van zo'n oplossing geen wortels voor.

Voor elk n-degraadspolynoom $p(z)$ met $n > 1$ geldt de volgende stelling.

> **Factorstelling:** *Als $p(z)$ een nulpunt z_0 heeft, dan bestaat er een polynoom $q(z)$ waarvoor geldt dat $p(z) = (z - z_0)q(z)$. Je kunt dan dus een factor $(z - z_0)$ van $p(z)$ afsplitsen.*

Een eerstegraadspolynoom heet ook wel een *lineair* polynoom; de bijbehorende vergelijking noemt men dan ook vaak een *lineaire* vergelijking. Een tweedegraadsvergelijking heet ook wel een *kwadratische* vergelijking of *vierkantsvergelijking*. Vierkantsvergelijkingen kun je oplossen met de *abc*-formule. Complexe vierkantsvergelijkingen hebben altijd twee complexe oplossingen z_1 en z_2. Het bijbehorende polynoom $p(z) = \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$ kan dan geschreven worden als $p(z) = \alpha_2(z - z_1)(z - z_2)$. Als de discriminant nul is, vallen z_1 en z_2 samen en dan geldt dus $p(z) = \alpha_2(z - z_1)^2$.

In het algemeen geldt voor complexe n-degraadspolynomen de volgende stelling, die bekend staat als de *hoofdstelling van de algebra* en die voor het eerst bewezen is door C.F. Gauss in het begin van de negentiende eeuw.

> **Hoofdstelling van de algebra:** *Bij elk n-degraads polynoom $p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$ met $n \geq 1$ zijn er n complexe getallen $z_1, \ldots, z_n$ zo, dat $p(z) = \alpha_n(z - z_1) \ldots (z - z_n)$.*

De getallen $z_1, \ldots, z_n$ zijn de nulpunten van $p(z)$. Ze hoeven niet verschillend te zijn. Komt een nulpunt k maal voor, dan spreekt men van een *k-voudig* nulpunt; k heet de *multipliciteit* van het nulpunt. Elk n-degraadspolynoom met $n \geq 1$ heeft dus precies n complexe nulpunten als je ze elk met hun juiste multipliciteit telt.

3.11 Splits de volgende reële polynomen in reële lineaire factoren en reële kwadratische factoren met een negatieve discriminant.
(Hint: als je zo'n ontbinding niet direct ziet, zoek dan eerst een nulpunt en gebruik de factorstelling.)

a. $z^3 + 1$
b. $z^3 - 1$
c. $z^4 - 1$
d. $z^3 + 27$
e. $z^4 + 2z^2 + 1$
f. $z^4 - 2z^2 + 1$

3.12 Stel dat n een oneven getal is en dat

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

een reëel n-degraadspolynoom is. Ook zonder gebruik te maken van complexe getallen kun je bewijzen dat $p(x)$ minstens één reëel nulpunt heeft, namelijk door $p(x)$ te schrijven als

$$p(x) = x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

en het gedrag van $p(x)$ voor grote positieve en grote negatieve x-waarden met elkaar te vergelijken. Geef zo'n bewijs.

Over het oplossen van n-degraadsvergelijkingen
Bij vierkantsvergelijkingen kan men de oplossingen vinden met de *abc*-formule. Ook voor derdegraads- en vierdegraadsvergelijkingen zijn er zulke exacte formules. Die zijn echter een stuk ingewikkelder; we behandelen ze hier niet.
Voor n-degraadsvergelijkingen met $n \geq 5$ bestaan er geen vergelijkbare algebraïsche methodes om op een dergelijke manier alle oplossingen te vinden. In zulke gevallen zal men zijn toevlucht vaak nemen tot numerieke methodes waarmee de nulpunten kunnen worden benaderd. De *hoofdstelling van de algebra* garandeert dus dat er altijd n oplossingen zijn (mits geteld met de juiste multipliciteit), maar de stelling geeft geen algemene methode om ze te vinden!

Reële polynomen

Wanneer alle coëfficiënten van een polynoom reële getallen zijn, noemen we het een *reëel polynoom*. Het is dan van de vorm

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

voor zekere reële getallen $a_n, \ldots, a_0$. We veronderstellen weer dat $a_n \neq 0$. Ook zo'n reëel polynoom heeft n complexe nulpunten, maar die hoeven niet reëel te zijn. Zo heeft $p(z) = z^2 + 1$ geen reële nulpunten. We kunnen wel direct zeggen dat er *hoogstens n* reële nulpunten zijn. Omdat reële polynomen natuurlijk veel voorkomen, is het goed om er een aantal speciale eigenschappen van af te leiden. De belangrijkste is de volgende stelling.

> **Stelling:** *Als $z_0 = x_0 + \mathrm{i}\, y_0$ een niet-reëel nulpunt is van het reële polynoom $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ dan is de geconjugeerde $\overline{z_0} = x_0 - \mathrm{i}\, y_0$ ook een nulpunt van $p(z)$.*

Het bewijs, dat heel eenvoudig is, berust op drie eigenschappen die onmiddellijk uit de definitie van geconjugeerde volgen:

1. Als a een reëel getal is, dan is $\overline{a} = a$.
2. Voor elk tweetal complexe getallen α en β geldt $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$.
3. Voor elk tweetal complexe getallen α en β geldt $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$.

Uit de derde eigenschap volgt in het bijzonder dat $\overline{z^k} = (\overline{z})^k$ voor elke k.

Bewijs: Stel $z_0 = x_0 + \mathrm{i}\, y_0$ is een nulpunt van $p(z)$, dus $p(z_0) = 0$. Dan geldt

$$\begin{aligned} p(\overline{z_0}) &= a_n(\overline{z_0})^n + a_{n-1}(\overline{z_0})^{n-1} + \cdots + a_1\overline{z_0} + a_0 \\ &= \overline{a_n}\;\overline{z_0^n} + \overline{a_{n-1}}\;\overline{z_0^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1}\;\overline{z_0} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0} = \overline{p(z_0)} = \overline{0} = 0 \end{aligned}$$

Als er in de ontbinding $p(z) = a_n(z - z_1)\ldots(z - z_n)$ een factor $(z - z_k)$ is waarvoor $z_k = x_k + \mathrm{i}\, y_k$ niet reëel is, dan is er dus ook een factor $(z - \overline{z_k})$. We nemen ze samen en werken de haakjes uit:

$$(z - z_k)(z - \overline{z_k}) = z^2 - (z_k + \overline{z_k})z + z_k\overline{z_k} = z^2 - 2x_k z + x_k^2 + y_k^2$$

Dit is een reëel kwadratisch polynoom met discriminant $4x_k^2 - 4(x_k^2 + y_k^2) = -4y_k^2$. Die is negatief, zoals verwacht. Afsplitsen van die kwadratische factor geeft een polynoom van graad $n - 2$ waarop we weer hetzelfde kunnen toepassen, enzovoort. We hebben hiermee bewezen:

> **Stelling:** *Elk reëel polynoom kan geschreven worden als een product van reële lineaire polynomen en reële kwadratische polynomen met een negatieve discriminant.*

Een direct gevolg is dat de graad van een reëel polynoom zonder reële nulpunten altijd even is. Bijgevolg heeft elk reëel polynoom van oneven graad minstens één reëel nulpunt.

Samenvatting

De *n-demachtswortels* van een complex getal $\alpha = r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}$ zijn gedefinieerd als

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\,(\frac{1}{n}\varphi + \frac{2k\pi}{n})\,\mathrm{i}} \qquad \text{voor} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

waarbij er dus (tenzij $\alpha = 0$) precies n verschillende mogelijkheden voor zo'n wortel zijn. Ze vormen de hoekpunten van een regelmatige n-hoek met de oorsprong als middelpunt.

Een *polynoom* is een functie van de vorm

$$p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0 \qquad (\text{met } \alpha_n \neq 0)$$

De complexe getallen α_n, α_{n-1}, …, α_1, α_0 heten de *coëfficiënten*, en het complexe getal z heet de *variabele*. Het getal n heet de *graad* van het polynoom.

Factorstelling: Als een polynoom $p(z)$ van graad groter dan 1 een nulpunt z_0 heeft, dan bestaat er een polynoom $q(z)$ waarvoor geldt dat $p(z) = (z - z_0)q(z)$. Je kunt dan dus een factor $(z - z_0)$ van $p(z)$ afsplitsen.

Hoofdstelling van de algebra: Bij elk n-degraads polynoom

$$p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

van graad groter dan of gelijk aan 1 zijn er n complexe getallen z_1, …, z_n zo, dat

$$p(z) = \alpha_n (z - z_1) \ldots (z - z_n)$$

De getallen z_1, …, z_n zijn de *nulpunten* van $p(z)$, met andere woorden, het zijn de oplossingen van de n-degraadsvergelijking $p(z) = 0$.

De nulpunten hoeven niet verschillend te zijn. Komt een nulpunt in de bovenstaande ontbinding k maal voor, dan spreekt men van een *k-voudig* nulpunt; k heet de *multipliciteit* van het nulpunt. Elk n-degraadspolynoom met $n \geq 1$ heeft dus precies n complexe nulpunten als je ze elk met hun juiste multipliciteit telt.

Stelling: Elk reëel polynoom kan geschreven worden als een product van reële lineaire polynomen en reële kwadratische polynomen met een negatieve discriminant.

Gevolgen:
1. De graad van een reëel polynoom zonder reële nulpunten is altijd even.
2. Elk reëel polynoom van oneven graad heeft minstens één reëel nulpunt.