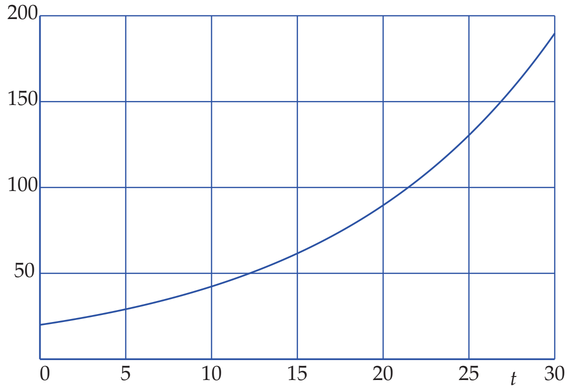
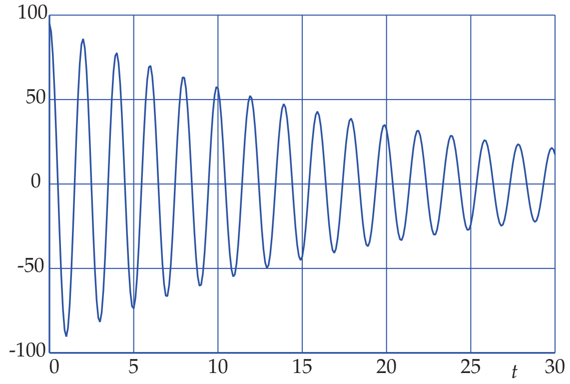
5 Lineaire differentiaalvergelijkingen



Een voorbeeld van een continu exponentieel groeimodel, gegeven door de differentiaalvergelijking $y'(t) = ay(t)$. *Hier is* $y(0) = 20$ *en* $a = 0.075$.



Een voorbeeld van een gedempte trilling bij een massa-veersysteem met als differentiaalvergelijking $mu''(t) + du'(t) + ku(t) = 0$. *Hier is* $m = 1$, $d = 0.1$, $k = 10$ *genomen met beginwaarden* $u(0) = 95$ *en* $u'(0) = -1$.

Inleiding

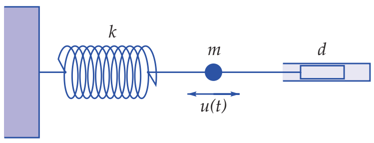
Een vergelijking waarin naast een functie $y(t)$ ook nog een of meer afgeleiden van $y(t)$ voorkomen, heet een differentiaalvergelijking. Een van de eenvoudigste voorbeelden is de differentiaalvergelijking

$$y'(t) = ay(t)$$

die voor $a > 0$ continue exponentiële groei modelleert. Een *oplossing* is een functie $y(t)$ die voor alle t aan de differentiaalvergelijking voldoet. In het algemeen zijn er oneindig veel oplossingen, die in dit geval allemaal van de vorm $y(t) = A\,\mathrm{e}^{at}$ zijn. Een *startwaarde*, bijvoorbeeld $y(0)$, legt de constante A vast.

In dit hoofdstuk behandelen we zogenaamde lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde, dat wil zeggen dat er naast $y(t)$ ook nog de eerste afgeleide $y't)$ en de tweede afgeleide $y''(t)$ in voorkomen. Een natuurkundig voorbeeld waarin zo'n differentiaalvergelijking gebruikt wordt, is het zogenaamde *massa-veersysteem*.

Stel dat een puntmassa m bevestigd is aan een veer met veerconstante k en een demper met wrijvingsfactor d. Onder $u(t)$ verstaan we de uitwijking van de massa vanuit de evenwichtsstand op tijdstip t.

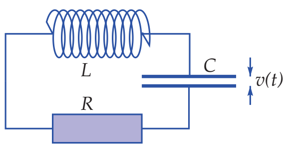


De massa is dan onderhevig aan twee terugdrijvende krachten: de veerkracht die evenredig is aan de uitwijking $u(t)$ en de dempingskracht die evenredig is met de snelheid $u'(t)$. Volgens de wet van Newton is de som van die krachten gelijk aan de massa m maal de versnelling $u''(t)$, dus $mu''(t) = -ku(t) - du'(t)$ oftewel

$$mu''(t) + du'(t) + ku(t) = 0$$

Wanneer men zo'n systeem op $t = 0$ een bepaalde beginuitwijking $u(0)$ en beginsnelheid $u'(0)$ geeft, zal het een gedempte trilling gaan uitvoeren.

Een ander voorbeeld komt uit de electrotechniek. In een stroomkring zijn een weerstand R, een condensator met capaciteit C en een inductiespoel met zelfinductie L in serie geschakeld. We meten het spanningsverschil $v(t)$ over de condensator.



Men kan aantonen dat $v(t)$ dan voldoet aan de differentiaalvergelijking

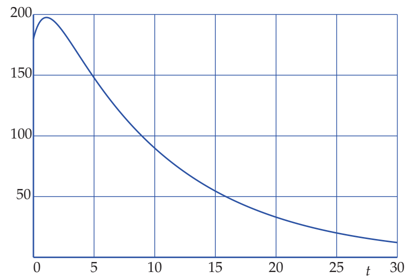
$$LCv''(t) + RCv'(t) + v(t) = 0$$

Ook hier is het zo dat het systeem bij gegeven beginwaarden $v(0)$ en $v'0)$ een gedempte trilling gaat uitvoeren. In dit hoofdstuk zullen we algemene formules afleiden voor de oplossingsfuncties van dit soort differentiaalvergelijkingen.

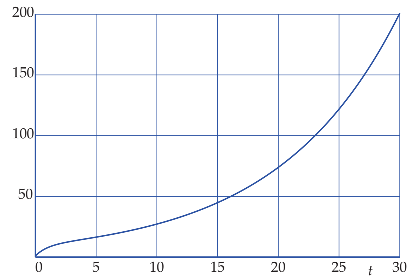
Hieronder zie je enige voorbeelden van grafieken van oplossingsfuncties van lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde van de vorm

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

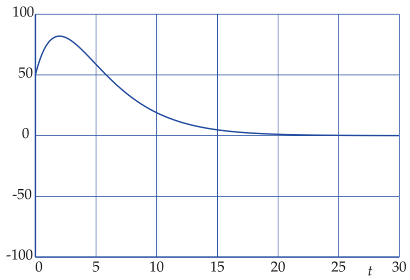
De grafieken geven een indruk van de grote verscheidenheid aan verschijningsvormen van zulke oplossingsfuncties. Telkens zijn de waarden van a, b en c en de beginwaarden $y(0)$ en $y'(0)$ gegeven.



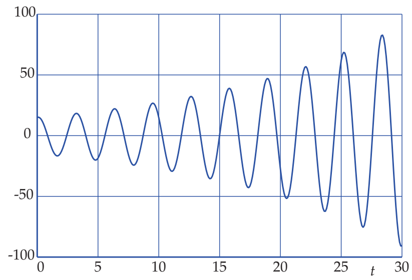
$a = 1, b = 1.1, c = 0.1$
$y(0) = 180, y'(0) = 40$



$a = 1, b = 0.9, c = -0.1$
$y(0) = 1, y'(0) = 10$



$a = 1, b = 0.7, c = 0.1225$
$y(0) = 50, y'(0) = 40$



$a = 1, b = -0.12, c = 4$
$y(0) = 15, y'(0) = 5$

5.1 Bereken bij elk van de vier hierboven gegeven differentiaalvergelijkingen de wortels en de discriminant van de karakteristieke vergelijking.

Lineaire differentiaalvergelijkingen van orde 2

Een differentiaalvergelijking van de vorm

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

waarbij a, b en c willekeurige gegeven reële constanten zijn met $a \neq 0$, heet een *lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde*. Eigenlijk is de volledige term: *lineaire homogene differentiaalvergelijking van de tweede orde met constante coëfficiënten* maar wij zullen die uitgebreide terminologie hier niet gebruiken en ook niet toelichten. Omdat $a \neq 0$ is, kunnen we de vergelijking delen door a, met andere woorden, we kunnen veronderstellen dat $a = 1$. Met het oog op de vele toepassingen waarin a, b en c vaak een specifieke fysische betekenis hebben, zullen we dit hier echter niet doen.

We zullen in dit hoofdstuk een algemene oplossingsmethode presenteren, dat wil zeggen een methode waarmee je een formule kunt vinden voor $y(t)$ in termen van a, b en c en zekere *startwaarden*, die hier de vorm hebben van $y(0) = y_0$ en $y'(0) = m_0$. Met andere woorden, op het tijdstip $t = 0$ zijn de functiewaarde $y(0)$ en de afgeleide $y'(0)$ gegeven. We zullen zien dat daardoor de oplossingsfunctie $y(t)$ volledig wordt bepaald.

Het idee is als volgt. We laten de startwaarden voorlopig even terzijde, en concentreren ons op de differentiaalvergelijking zelf. Geïnspireerd door het continue exponentiële groeimodel proberen we of er oplossingsfuncties zijn van de vorm $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ is de Griekse letter 'lambda'). Invullen in de differentiaalvergelijking geeft dan $a\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t} + b\lambda\mathrm{e}^{\lambda t} + c\mathrm{e}^{\lambda t} = 0$, oftewel, na delen door $\mathrm{e}^{\lambda t}$,

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Dit is de *karakteristieke vergelijking* van de differentiaalvergelijking. Elke wortel λ geeft een oplossing $\mathrm{e}^{\lambda t}$. Je ziet dat in de karakteristieke vergelijking de variabele t niet meer voorkomt! Het is een zuiver algebraïsche vergelijking. De aard van de oplossingen wordt bepaald door het teken van de discriminant $D = b^2 - 4ac$. Als $D > 0$ is, zijn de twee wortels reëel, als $D = 0$ zijn ze reëel en vallen ze samen, en als $D < 0$ zijn ze toegevoegd complex.

We behandelen de drie gevallen $D > 0$, $D = 0$ en $D < 0$ aan de hand van voorbeelden. Maar eerst merken we op dat voor lineaire differentiaalvergelijkingen ook weer het *superpositiebeginsel* geldt: als $y_1(t)$ en $y_2(t)$ allebei oplossingsfuncties zijn, dan is voor elke keuze van A_1 en A_2 ook de *lineaire combinatie* $z(t) = A_1y_1(t) + A_2y_2(t)$ een oplossingsfunctie. Je kunt dit zelf gemakkelijk nagaan.

5.2 Bepaal de oplossingsfunctie van elk van de volgende differentiaalvergelijkingen met de gegeven startwaarden.

a. $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 1$
b. $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 0$
c. $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
d. $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$
e. $6y''(t) + 5y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

5.3 Bepaal de oplossingsfunctie van elk van de volgende differentiaalvergelijkingen met de gegeven startwaarden.

a. $y''(t) - y'(t) + \frac{1}{4}y(t) = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$
b. $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 1$
c. $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
d. $4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$
e. $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

5.4 In deze opgave leer je de achtergrond van de op de tegenoverliggende bladzijde gegeven oplossingsmethode voor het geval $D = 0$. Stel voor het gemak dat de differentiaalvergelijking de volgende vorm heeft

$$y''(t) - 2py'(t) + p^2y(t) = 0$$

De karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - 2p\lambda + p^2 = 0$ heeft discriminant $D = 0$. De enige wortel is $\lambda = p$. Stel nu $z(t) = \mathrm{e}^{-pt}y(t)$, met andere woorden, $y(t) = \mathrm{e}^{pt}z(t)$. Dat lijkt een vreemde truc, maar we zullen laten zien dat de oorspronkelijke differentiaalvergelijking voor de functie $y(t)$ hierdoor getransformeerd wordt in een zeer eenvoudig oplosbare differentiaalvergelijking voor $z(t)$. En hebben we $z(t)$ gevonden, dan hebben we ook $y(t)$ te pakken!

a. Bereken $y'(t)$ en $y''(t)$ door differentiëren met de productregel en de kettingregel van $y(t) = \mathrm{e}^{pt}z(t)$.
b. Laat hiermee zien dat

$$y''(t) - 2py'(t) + p^2y(t) = \mathrm{e}^{pt}z''(t)$$

c. Concludeer hieruit dat $z(t)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking $z''(t) = 0$ (bedenk dat een e-macht nooit nul is!).
d. Leid hieruit af dat $z(t) = A_1 + A_2t$ voor zekere constanten A_1 en A_2.
(Hint: twee maal integreren.)
e. Concludeer hieruit dat de algemene oplossingsfunctie van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking gelijk is aan

$$y(t) = (A_1 + A_2t)\,\mathrm{e}^{pt}$$

Positieve discriminant

Als $D = b^2 - 4ac > 0$ is, zijn er twee verschillende reële oplossingen λ_1 en λ_2 van de karakteristieke vergelijking, en de algemene oplossing heeft dan de gedaante

$$y(t) = A_1\,e^{\lambda_1 t} + A_2\,e^{\lambda_2 t}$$

Merk op dat

$$y'(t) = \lambda_1 A_1\,e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 A_2\,e^{\lambda_2 t}$$

en dus geldt $y(0) = A_1 + A_2$ en $y'(0) = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$.

Neem bijvoorbeeld de differentiaalvergelijking

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0$$

De wortels van de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ zijn $\lambda_1 = 2$ en $\lambda_2 = -1$. Wanneer hierbij de startwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = -2$ gegeven zijn, kun je A_1 en A_2 oplossen uit de vergelijkingen $A_1 + A_2 = 1$ en $2A_1 - A_2 = -2$. De oplossing van dit stelsel is $A_1 = -\frac{1}{3}$ en $A_2 = \frac{4}{3}$. De oplossingsfunctie is dus

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{4}{3}e^{-t}$$

Discriminant nul

Als $D = b^2 - 4ac = 0$ is, is er maar één oplossing, namelijk $\lambda = -\frac{b}{2a}$. Naast de basisoplossingsfunctie $y_1(t) = e^{\lambda t}$ is er dan ook een basisoplossingsfunctie $y_2(t) = te^{\lambda t}$. De algemene oplossing is dan

$$y(t) = A_1 e^{\lambda t} + A_2 t e^{\lambda t} = (A_1 + tA_2)\,e^{\lambda t}$$

Neem bijvoorbeeld de differentiaalvergelijking

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$$

De enige oplossing van de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ is $\lambda = -2$ en de algemene oplossingsfunctie is dus

$$y(t) = (A_1 + tA_2)\,e^{-2t}$$

Wanneer hierbij de startwaarden $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$ gegeven zijn, vinden we $A_1 = -1$ en $A_2 = -2$ (controleer!), dus dan is de gezochte oplossingsfunctie

$$y(t) = (-1 - 2t)\,e^{-2t}$$

5.5 Bepaal de oplossingsfunctie van elk van de volgende differentiaalvergelijkingen met de gegeven startwaarden.

a. $y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 0, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 1$
b. $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 0$
c. $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$
d. $y''(t) - 2y'(t) + 10y(t) = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$
e. $y''(t) + 4y'(t) + 8y(t) = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

5.6 Schrijf alle oplossingsfuncties van de vorige opgave in de vorm

$$y(t) = 2r\,\mathrm{e}^{pt}\cos(qt + \chi)$$

5.7 Op bladzijde 55 zijn voorbeelden gegeven van differentiaalvergelijkingen voor massaveersystemen en stroomkringen. Ga na dat in het theoretische geval van wrijving nul ($d = 0$), respectievelijk weerstand nul ($R = 0$), alle oplossingsfuncties zuivere sinusoïden zijn ('harmonische trillingen'). Wat is de frequentie in termen van m en k, respectievelijk L en C? (Bedenk dat die constanten positief zijn op fysische gronden). Hoe hangt de amplitude af van de beginwaarden $u(0)$ en $u'(0)$, respectievelijk $v(0)$ en $v'(0)$?

(Bij de standaardsinusoïde $A\cos(qt + \chi)$ met $A > 0$ en $q > 0$ heet A de amplitude, $\frac{q}{2\pi}$ de frequentie en χ de fasehoek.)

5.8 Toon aan dat $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ voor een massaveersysteem met een positieve wrijving d en dat $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$ voor een stroomkring met een positieve weerstand R. Onderscheid hierbij de gevallen $D > 0$, $D = 0$ en $D < 0$ maar gebruik wel dat alle fysische constanten (m, d en k, respectievelijk L, C en R) positief zijn.

Negatieve discriminant

We beginnen met een voorbeeld, namelijk de differentiaalvergelijking

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 0$$

Deze heeft als karakteristieke vergelijking

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

met discriminant $D = 4 - 20 = -16 < 0$. De twee wortels zijn $\lambda_1 = 1 + 2\,\mathrm{i}$ en $\lambda_2 = 1 - 2\,\mathrm{i}$, en de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is dus (vergelijk ook paragraaf op bladzijde 43)

$$\begin{aligned} y(t) &= A_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + A_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} = A_1\,\mathrm{e}^{(1+2\,\mathrm{i})t} + A_2\,\mathrm{e}^{(1-2\,\mathrm{i})t} \\ &= \mathrm{e}^{t}\left(A_1\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,t} + A_2\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,t}\right) \\ &= \mathrm{e}^{t}\big((A_1 + A_2)\cos 2t + \mathrm{i}\,(A_1 - A_2)\sin 2t\big) \\ &= \mathrm{e}^{t}\,(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t) \end{aligned}$$

Kies je voor C_1 en C_2 reële constanten, dan is de oplossingsfunctie ook reëel. In dat geval is $A_1 = \frac{1}{2}(C_1 - \mathrm{i}\,C_2)$ en $A_2 = \frac{1}{2}(C_1 + \mathrm{i}\,C_2)$ (vergelijk bladzijde 45) dus dan zijn A_1 en A_2 toegevoegd complex.

De oplossingsfunctie $y(t)$ kun je dan ook schrijven als het product van een e-macht en een standaardsinusoïde. Dat is voor de toepassingen, waarin uit de standaardvorm van een sinusoïde belangrijke constanten zoals de amplitude en de fasehoek kunnen worden gehaald, vaak van groot belang. Schrijf daartoe $A_1 = r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\chi}$ en $A_2 = r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\chi}$ (χ is de Griekse letter 'chi'). Dan is

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{t}\left(A_1\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,t} + A_2\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,t}\right) = \mathrm{e}^{t}\left(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\chi}\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,t} + r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\chi}\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,t}\right) \\ &= r\,\mathrm{e}^{t}\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(2t+\chi)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(2t+\chi)}\right) = 2r\,\mathrm{e}^{t}\cos(2t+\chi) \end{aligned}$$

Voor een willekeurige differentiaalvergelijking met een karakteristieke vergelijking met een negatieve discriminant met wortels $\lambda_{1,2} = p \pm \mathrm{i}\,q$ kan de algemene reële oplossing geschreven worden als

$$y(t) = \mathrm{e}^{pt}\,(C_1\cos qt + C_2\sin qt) = 2r\,\mathrm{e}^{pt}\cos(qt+\chi)$$

waarbij $C_1 - \mathrm{i}\,C_2 = 2A_1 = 2r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\chi}$. Bij gegeven startwaarden $y(0)$ en $y'(0)$ geldt $y(0) = C_1$ en $y'(0) = pC_1 + qC_2$ dus $C_2 = -\frac{p}{q}y(0) + \frac{1}{q}y'(0)$.

Gemengde opgaven.

5.9 Bepaal de oplossingsfunctie van elk van de volgende differentiaalvergelijkingen met de gegeven startwaarden.

a. $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$
b. $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 0$
c. $y''(t) + 3y(t) = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3$
d. $y''(t) - y'(t) - 12y(t) = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
e. $y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
f. $y^{(3)}(t) - 2y'(t) = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$
g. $y^{(3)}(t) + 8y(t) = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$

Lineaire differentiaalvergelijkingen van hogere orde

Wat we voor lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde hebben gedaan, kunnen we ook voor lineaire differentiaalvergelijkingen van hogere orde doen. Zo'n vergelijking heeft de vorm

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

Een oplossingsfunctie $y(t)$ wordt vastgelegd door n beginvoorwaarden $y(0)$, $y'(0)$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(0)$ en de karakteristieke vergelijking is nu van de graad n, namelijk

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Wanneer deze vergelijking n verschillende (reële of complexe) wortels heeft, leveren die n basisoplossingsfuncties, waaruit door lineaire combinaties de algemene oplossing kan worden gevormd. Wanneer een wortel λ multipliciteit m heeft met $m > 1$, dan zijn de volgende m functies basisoplossingsfuncties:

$$\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad t\,\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \ldots, \quad t^{m-1}\,\mathrm{e}^{\lambda t}$$

Op deze manier leveren de oplossingen van de karakteristieke vergelijking dus in alle gevallen n basisoplossingen waarmee de algemene oplossing kan worden gevormd.

Realistische modellen

Wanneer een lineaire differentiaalvergelijking een wiskundig model is van een proces waarin de evolutie in de tijd van een grootheid y gemodelleerd wordt als een differentieerbare functie $y(t)$ die op elk tijdstip t aan de differentiaalvergelijking voldoet, wordt die evolutie volledig bepaald door de differentiaalvergelijking en de n beginvoorwaarden. In zulke situaties zal het systeem op den duur naar de ruststand terugkeren, dat wil zeggen dat $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. Dit is het geval als alle wortels λ van de karakteristieke vergelijking, reëel of complex, voldoen aan $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, met andere woorden, als ze in het linkerhalfvlak liggen. In 'realistische' modellen zal dit altijd het geval zijn.

Bij massa-veersystemen en bij stroomkringen met een weerstand, condensator en inductiespoel is dat altijd het geval als de dempingsfactor, respectievelijk de weerstand, positief is. In de geïdealiseerde toestand zonder demping of weerstand blijft het systeem eeuwig oscilleren volgens een sinusoïde (harmonische trilling).

Samenvatting

Een homogene lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde met constante (reële) coëfficiënten a, b en c (waarbij $a \neq 0$) voor een functie $y(t)$ kan geschreven worden als

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

Karakteristieke vergelijking: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

Oplossingen via de abc-formule: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Discriminant $D = b^2 - 4ac$. Drie gevallen:

1. $D > 0$. Dan heeft de karakteristieke vergelijking twee verschillende reële oplossingen λ_1 en λ_2. Basisoplossingen van de differentiaalvergelijking zijn dan $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ en $\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$. De algemene oplossing is

$$y(t) = A_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + A_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

Bij gegeven startwaarden $y(0)$ en $y'(0)$ kun je A_1 en A_2 vinden met behulp van de afgeleide

$$y'(t) = A_1\lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + A_2\lambda_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

door $t = 0$ in te vullen in de uitdrukkingen voor $y(t)$ en $y'(t)$. Dit geeft twee vergelijkingen voor de twee onbekenden A_1 en A_2 en daaruit kun je A_1 en A_2 oplossen.

2. $D = 0$. Dan heeft de karakteristieke vergelijking één oplossing $\lambda = -\frac{b}{2a}$. Basisoplossingen van de differentiaalvergelijking zijn dan $\mathrm{e}^{\lambda t}$ en $t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$. De algemene oplossing is

$$y(t) = A_1 \mathrm{e}^{\lambda t} + A_2 t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$$

Bij gegeven startwaarden $y(0)$ en $y'(0)$ kun je A_1 en A_2 vinden met behulp van de afgeleide door $t = 0$ in te vullen in $y(t)$ en $y'(t)$. Dit geeft twee vergelijkingen voor de twee onbekenden A_1 en A_2 en daaruit kun je A_1 en A_2 oplossen.

3. $D < 0$. Dan heeft de karakteristieke vergelijking twee toegevoegd complexe oplossingen $\lambda_1 = p + \mathrm{i}\,q$ en $\lambda_2 = p - \mathrm{i}\,q$. Basisoplossingen van de differentiaalvergelijking zijn $\mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \mathrm{e}^{pt}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}qt}$ en $\mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \mathrm{e}^{pt}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qt}$. De algemene oplossing kan dan met behulp van de formules van Euler worden geschreven als

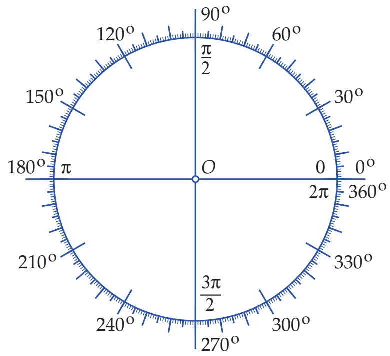
$$y(t) = \mathrm{e}^{pt}\,(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt) = 2r\,\mathrm{e}^{pt}\cos(qt + \chi)$$

Bij gegeven startwaarden $y(0)$ en $y'(0)$ kun je C_1 en C_2 vinden met behulp van de afgeleide door $t = 0$ in te vullen in $y(t)$ en $y'(t)$. Dit geeft twee vergelijkingen voor de twee onbekenden C_1 en C_2. Desgewenst kun je daarna ook r en χ berekenen via de betrekking $C_1 - \mathrm{i}\,C_2 = 2r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\chi}$.

Voorkennis

Hoekmeting

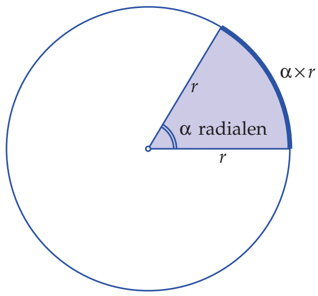
Hoeken meten we in *graden* of in *radialen*. Hiernaast zie je de eenheidscirkel in het vlak (de cirkel met straal 1 en de oorsprong O als middelpunt) waarop de beide verdelingen zijn aangegeven. Een volledige rondgang telt 360 graden, oftewel 2π radialen.



Ook draaiingshoeken kunnen we in graden of in radialen meten. De *draaiingsrichting* is dan wel van belang: volgens afspraak geven we draaiingen in het vlak tegen de klok in met een plusteken aan, en draaiingen met de klok mee met een minteken.

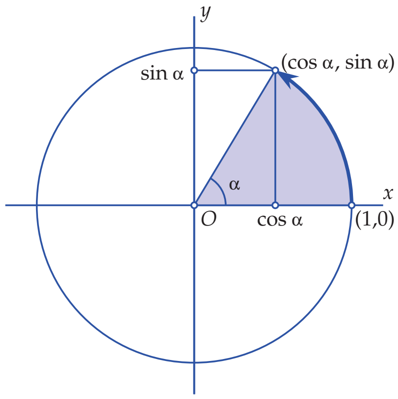
Bij draaiingen kan de draaiingshoek natuurlijk ook groter dan 360° zijn. Voor het resultaat maakt het niets uit of je er gehele veelvouden van 360° (of 2π radialen) bij optelt of van aftrekt.

De term *radiaal* komt van *radius*, hetgeen straal betekent. Wanneer je op een cirkel met straal r een boog tekent die vanuit het middelpunt onder een hoek van α radialen wordt gezien, is de lengte van die boog $\alpha \times r$. De hoekmaat in radialen geeft dus de verhouding tussen de booglengte en de straal, vandaar de naam radiaal. Een hoek van 1 radiaal is iets kleiner dan 60 graden, namelijk, in acht decimalen nauwkeurig, 57.29577950 graden. De exacte waarde is $360/(2\pi)$.



Bij een cirkel met straal $r = 1$ is de booglengte precies *gelijk* aan de middelpuntshoek α in radialen. Bij een volledige rondgang langs een cirkel hoort een draaiingshoek van 2π radialen. De omtrek van de eenheidscirkel is dus ook gelijk aan 2π. De omtrek van een cirkel met een straal r is $2\pi r$.

De sinus, de cosinus en de tangens



Bij elke draaiingshoek α hoort een draaiing in het vlak om de oorsprong over die hoek. Een positieve draaiingshoek correspondeert met een draaiing tegen de klok in, een negatieve hoek hoort bij een draaiing met de klok mee. We kunnen zo'n draaiing aangeven via een boog van de eenheidscirkel die in $(1,0)$ begint en middelpuntshoek α heeft. De coördinaten (x,y) van het eindpunt zijn dan respectievelijk de *cosinus* en de *sinus* van α, dus $x = \cos\alpha$ en $y = \sin\alpha$.

Omdat (x,y) op de eenheidscirkel ligt, geldt $x^2 + y^2 = 1$, dus

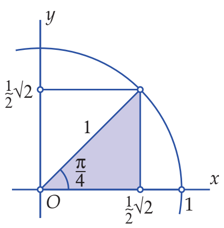
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Let hierbij op de notatie: $\cos^2\alpha$ betekent $(\cos\alpha)^2$ en $\sin^2\alpha$ betekent $(\sin\alpha)^2$. Deze notatievormen zijn algemeen gebruikelijk.

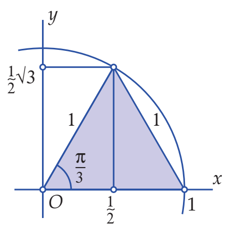
De *tangens* van α is het quotiënt van de sinus en de cosinus, in formule:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

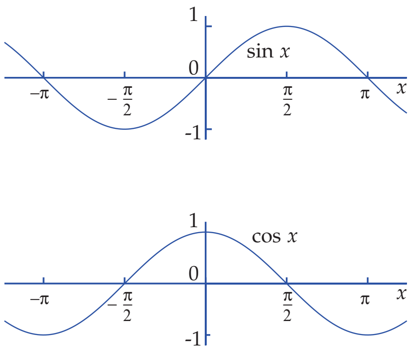
Er zijn enige hoeken α met bijzondere waarden voor de sinus, de cosinus en de tangens. Voor $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (in radialen) geven we ze in de vorm van een tabel. Uit de beide tekeningen kun je die waarden afleiden. Bedenk daarbij dat de linkerdriehoek de vorm heeft van een 'geodriehoek' met een schuine zijde van lengte 1 en rechthoekszijden van lengte $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (stelling van Pythagoras). De rechterdriehoek is gelijkzijdig met zijden van lengte 1. De verticale lijn vanuit de top deelt de basis middendoor, en volgens Pythagoras is de lengte ervan dus gelijk aan $\sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

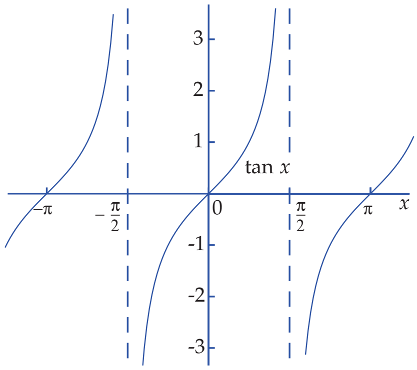


α	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$



Grafieken van goniometrische functies





Hierboven zijn de grafieken getekend van de functies $\sin x$, $\cos x$ en $\tan x$, met x in radialen. Die functies zijn *periodiek*: de sinus en de cosinus met periode 2π, de tangens met periode π. De tangens heeft verticale asymptoten voor $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ met k geheel, want voor die waarden van x is de cosinus nul, en dan is $\tan x = (\sin x)/(\cos x)$ dus niet gedefinieerd.

Uit de definitie van de sinus, de cosinus en de tangens met behulp van de eenheidscirkel (zie bladzijde 66) volgen direct de volgende eigenschappen, die je ook in de grafieken terugziet:

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x, \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

Optelformules en dubbele-hoekformules

Naast de basisformule $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ en de 'symmetrieformules' van hierboven zijn er nog twee belangrijke gonioformules:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

Als je in deze optelformules β vervangt door $-\beta$ krijg je

$$\begin{aligned} \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

Als je in de optelformules $\alpha = \beta$ neemt, krijg je de *dubbele-hoekformules*:

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}$$

Met behulp van $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ kun je de formule voor $\cos 2\alpha$ uitbreiden tot

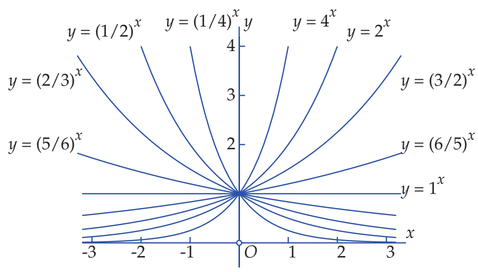
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Exponentiële functies en de e-macht

Functies van de vorm $f(x) = a^x$ voor $a > 0$ heten *exponentiële functies*. Hieronder is voor enige waarden van a de grafiek van a^x getekend. Al die grafieken gaan door het punt $(0, 1)$ want voor elke a geldt $a^0 = 1$.

Zo'n grafiek is stijgend als $a > 1$, en dalend als $0 < a < 1$. Voor $a = 1$ is de grafiek de horizontale lijn $y = 1$ want $1^x = 1$ voor elke waarde van x.
De grafieken van a^x en $(1/a)^x$ zijn elkaars spiegelbeeld in de y-as. Er geldt namelijk

$$(1/a)^x = \left(a^{-1}\right)^x = a^{-x}$$

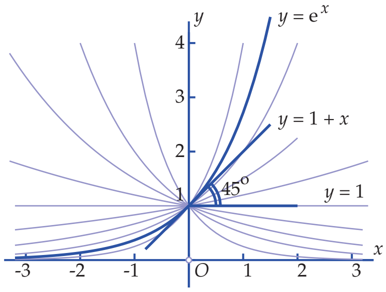


De belangrijkste eigenschappen van exponentiële functies zijn

$$\begin{array}{rcl} a^x \times a^y & = & a^{x+y} \\ a^x : a^y & = & a^{x-y} \\ (a^x)^y & = & a^{x \times y} \\ (a \times b)^x & = & a^x \times b^x \\ (a : b)^x & = & a^x \ : \ b^x \end{array}$$

De grafieken van de exponentiële functies van de vorm $f(x) = a^x$ met $a > 0$ snijden de y-as allemaal in het punt $(0, 1)$. Alle grafieken hebben in dat punt een raaklijn. Al die raaklijnen zijn verschillend, en allemaal hebben ze een vergelijking van de vorm $y = 1 + mx$ voor een zekere m.

Er is precies één waarde van a waarvoor geldt $m = 1$, dat wil zeggen dat de lijn $y = 1 + x$ de raaklijn is aan de grafiek van $f(x) = a^x$ in $(0, 1)$. Dat getal wordt e genoemd, en de bijbehorende functie $f(x) = \mathrm{e}^x$ speelt een belangrijke rol in de differentiaal- en integraalrekening. Hiernaast is de grafiek ervan getekend. Men kan bewijzen dat het getal e, net als het getal π of het getal $\sqrt{2}$, een *irrationaal* getal is. Er geldt $\mathrm{e} = 2.718281828459\ldots$.



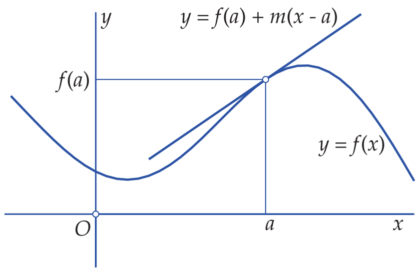
Voor kleine waarden van x vallen de grafiek van $f(x) = \mathrm{e}^x$ en de raaklijn $y = 1 + x$ vrijwel samen, dus voor kleine x geldt $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$. Zelfs geldt dat $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \approx 1$ voor $x \approx 0$, of, nog preciezer uitgedrukt met behulp van een limiet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

Raaklijn en afgeleide

(De voorkennis in deze paragraaf wordt alleen in hoofdstuk 5 gebruikt.)
De grafieken van veel functies hebben in alle of bijna alle punten een 'glad' verloop: als je steeds sterker op zo'n punt inzoomt, gaat de grafiek steeds meer op een rechte lijn lijken. Die lijn is de raaklijn aan de grafiek in dat punt.

Hiernaast is de grafiek van zo'n functie $f(x)$ getekend, met daarbij ook de raaklijn in het punt $(a, f(a))$. Vlak in de buurt van dat punt zijn grafiek en raaklijn inderdaad nauwelijks van elkaar te onderscheiden.
Als de raaklijn niet verticaal is, kan de vergelijking ervan geschreven worden als $y = f(a) + m(x - a)$ voor een zekere m, de richtingscoëfficiënt van de raaklijn.



Die richtingscoëfficiënt m kan dan door middel van een limiet in termen van de functie $f(x)$ en het punt a worden uitgedrukt:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Men noemt m de *afgeleide* van $f(x)$ in a, en gebruikt daarvoor de notatie $f'(a)$. Als deze limiet bestaat (als eindig getal), heet de functie $f(x)$ *differentieerbaar* in a.

Wanneer een functie $f(x)$ differentieerbaar is in alle punten van een interval, is de afgeleide dus in elk punt van dat interval gedefinieerd, en daarmee is de afgeleide op dat interval zelf een functie geworden, de *afgeleide functie*. Veel gebruikte notaties voor de afgeleide functie van $f(x)$ zijn $f'(x)$ en $\dfrac{d}{dx}f(x)$.

De afgeleide functies van enige veel gebruikte functies zijn:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^p) &= p\,x^{p-1} \quad \text{voor elke } p \\ \frac{d}{dx}(\mathrm{e}^x) &= \mathrm{e}^x \\ \frac{d}{dx}(\cos x) &= -\sin x \\ \frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x \end{aligned}$$

De e-machtfunctie is dus gelijk aan zijn eigen afgeleide! Let ook op de tekens bij de afgeleiden van de sinus en de cosinus.

Wanneer een functie $f(x)$ differentieerbaar is in alle punten van een interval, kan de afgeleide functie ook weer een differentieerbare functie zijn. De afgeleide van de afgeleide heet dan de *tweede afgeleide*. Notatie: $f''(x)$ of $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$. Zo kun je doorgaan en de n-de afgeleide definiëren voor elke $n > 2$. Gebruikelijke notaties zijn in dat geval $f^{(n)}(x)$ (let op de haakjes om de n) of $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$.

Gonio gemakkelijk gemaakt

Eulers gemakkelijk te onthouden formule

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

maakt het makkelijk alle gonioformules te onthouden, of snel af te leiden als je ze vergeten bent. Bijvoorbeeld de somformules van bladzijde 67:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Bedenk hiervoor dat $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$ dus

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) &= e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}\\ &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)\\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

Gelijkstellen van de reële delen levert de somformule voor de cosinus, en gelijkstellen van de imaginaire delen de somformule voor de sinus.

Deze formules gelden overigens niet alleen maar voor de reële cosinus- en sinusfuncties, maar net zo goed voor de op bladzijde 21 gedefinieerde complexe uitbreidingen van deze functies:

$$\begin{aligned}\cos(z_1+z_2) &= \cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2\\ \sin(z_1+z_2) &= \sin z_1\cos z_2 + \cos z_1\sin z_2\end{aligned}$$

Probeer zelf maar eens een bewijs te geven!

Ook de formules voor de afgeleiden van de sinus- en cosinusfuncties zijn gemakkelijk snel af te leiden via de complexe e-machtfunctie, die, net als de reële e-machtfunctie, gelijk is aan zijn eigen afgeleide. Bedenk daarvoor dat op grond van de kettingregel geldt dat $\frac{d}{dx}e^{ix} = i\,e^{ix}$, en dus is

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cos x + i\sin x) &= \frac{d}{dx}e^{ix} = i\,e^{ix} = i(\cos x + i\sin x)\\ &= -\sin x + i\cos x\end{aligned}$$

Gelijkstellen van reële delen geeft $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ en gelijkstellen van de imaginaire delen geeft $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$.