Tentamen Inleiding Meten en Modelleren 8C120 - 2011

6 april 2011, 09:00-12:00

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Indien u een opgave niet kunt maken, geeft u dan aan hoe u de opgave zou maken. Dat kan een deel van de punten opleveren. Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Bijlage: domeinentabel.
Veel succes!

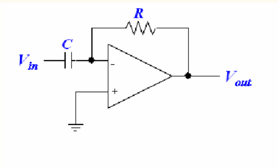
Vraag 1

Operationele versterker:
a. Geef de eigenschappen van een ideale operationele versterker voor biomedische instrumenten.

Antwoord

- De ingangsimpedentie is oneindig.
- De uitgangsimpedentie is nul.
- De versterking is oneindig.
- De ingangen hebben dezelfde spanning.

b. Wat doet onderstaande configuratie met het ingangssignaal Vin?
NB: Leid hiervoor de formule af voor $V_{\text{out}}(t)$ als functie van $V_{\text{in}}(t)$.



Antwoord

Het is een differentierende versterker. De stroom door de condensator en de weerstand zijn gelijk, omdat er geen stroom de versterker ingaat (ingangsimpedantie is oneindig. De stroom *i* door de condensator *C* geeft de volgende spanning over de condensator:

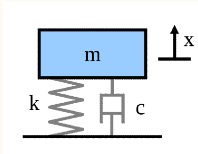
$i = C \frac{d V_i}{d t}$.

De stroom *i* loopt ook door weerstand *R*, we krijgen een minteken:

$i = -\frac{V_0}{R}$.

Dus: $V_0 = -R\,C \frac{d V_i}{d t}$.

Vraag 2



Massa-veer systeem:

We beschouwen een massa aan een veer. De beweging van de massa wordt gedempt met een schokdemper, die een tegenkracht genereert die evenredig is met de snelheid van de massa.

De massa is m, de veerkonstante is k, en de evenredigheidsconstante van de demper is c (zie de figuur hiernaast). De massa beweegt in de x-richting, positieve x is naar boven.

a. Leid de differentiaalvergelijking af die dit systeem beschrijft, als er geen externe kracht op de massa werkt.

Antwoord

De som van alle krachten op de massa is nul: $f_m + f_d + f_v = 0$.

De kracht door de traagheid van de massa is $f_m = m.a = m \frac{d^2 x}{d t^2}$.

De kracht die de demper uitoefent is evenredig met de snelheid: $f_d = c \frac{d v}{d t}$.

De kracht van de veer is evenredig met de uitwijking: $f_v = k\, x$.

Dus de differentiaalvergelijking is: $m \frac{d^2 x}{d t^2} + c \frac{d v}{d t} + k\, x = 0$.

b. Los deze differentiaalvergelijking op, met de volgende gegevens:
- de massa m is 1 kilogram,
- de dempings-evenredigheidsconstante c is 4 N sec/m,
- de veerconstante k is 5 N/m,
- de positie op tijdstip t=0 is +1 meter uit de evenwichtsstand,
- de snelheid op tijdstip t=0 is 1 m/sec.

Als je vraag a. niet hebt kunnen beantwoorden, mag je uitgaan van de volgende algemene differentiaalvergelijking: $a \ddot{x} + b \dot{x} + c\, x = 0$, waarbij een punt boven de functie een afgeleide naar de tijd voorstelt.

Antwoord

De differentiaalvergelijking wordt: $\frac{d^2 x}{d t^2} + 4 \frac{d v}{d t} + 5\, x = 0$.

We vullen in $y(t) = e^{\lambda t}$. De karakteristieke vergelijking wordt dan:

$\lambda^2 + 4\,\lambda + 5 = 0$, met oplossingen $\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4.5}}{2}$. Dus $\lambda_1 = -2 - i$, $\lambda_2 = -2 + i$.

```
Solve[λ^2 + 4 λ + 5 == 0, λ]

{{λ → -2 - i}, {λ → -2 + i}}
```

De oplossing wordt dan: $y(t) = A_1\, e^{(-2-i)\,t} + A_2\, e^{(-2+i)\,t}$. Invullen van de randvoorwaarden (startwaarden): $y(0) = A_1 + A_2 = 1$, en $y'[t] = A_1(-2-i)\, e^{(-2-i)\,t} + A_2(-2+i)\, e^{(-2+i)\,t}$ en de startwaarde $y'[0] = (-2-i)\, A_1 + (-2+i)\, A_2 = 0$.

De twee vergelijkingen in A_1 en A_2 bij elkaar optellen geeft: $A_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\, i$, waaruit volgt dat $A_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\, i$.

De oplossing wordt dus

$y(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\, i\right) e^{(-2-i)\,t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\, i\right) e^{(-2+i)\,t}.$

```
Clear[t]; DSolve[y''[t] + 4 y'[t] + 5 y[t] == 0, y[t], t]

{{y[t] → e^(-2 t) C[2] Cos[t] + e^(-2 t) C[1] Sin[t]}}
```

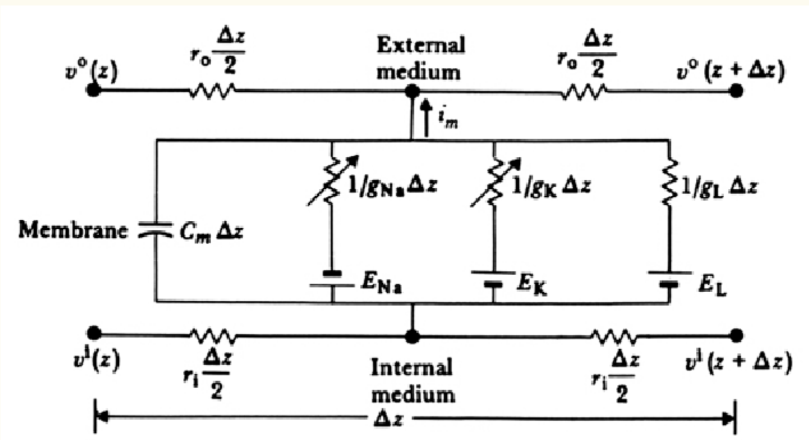
```
DSolve[{y''[t] + 4 y'[t] + 5 y[t] == 0, y[0] == 1, y'[0] == 1}, y[t], t] // Expand

{{y[t] → e^(-2 t) Cos[t] + 3 e^(-2 t) Sin[t]}}
```

c. Geef in woorden wat het eindresultaat voorstelt, in andere woorden: wat dit model je laat zien als voorspeld gedrag van een gedempt massa-veer systeem.

Antwoord

De sinus en cosinus termen geven aan dat de massa een periodieke oscillerende beweging maakt. De amplitude neemt (kwadratisch exponentieel) met de tijd af met $e^{-2\,t}$, wegens de demping.

Vraag 3 Membraan modellen en zenuwgeleiding

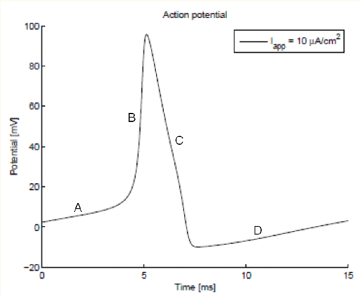


a. Beschrijf wat in bovenstaande figuur van een membraanmodel de term $\frac{1}{g_{Na}}$ Δz voorstelt.

Antwoord

De term $\frac{1}{g_{Na}}$ stelt de variabele geleidbaarheid (1/Ohm, Siemens) voor van het membraan gate molecuul voor Natrium ionen per lengte-eenheid Δz. De term Δz is een heel kort stukje van het membraanoppervlak dat hier in model wordt gezet.

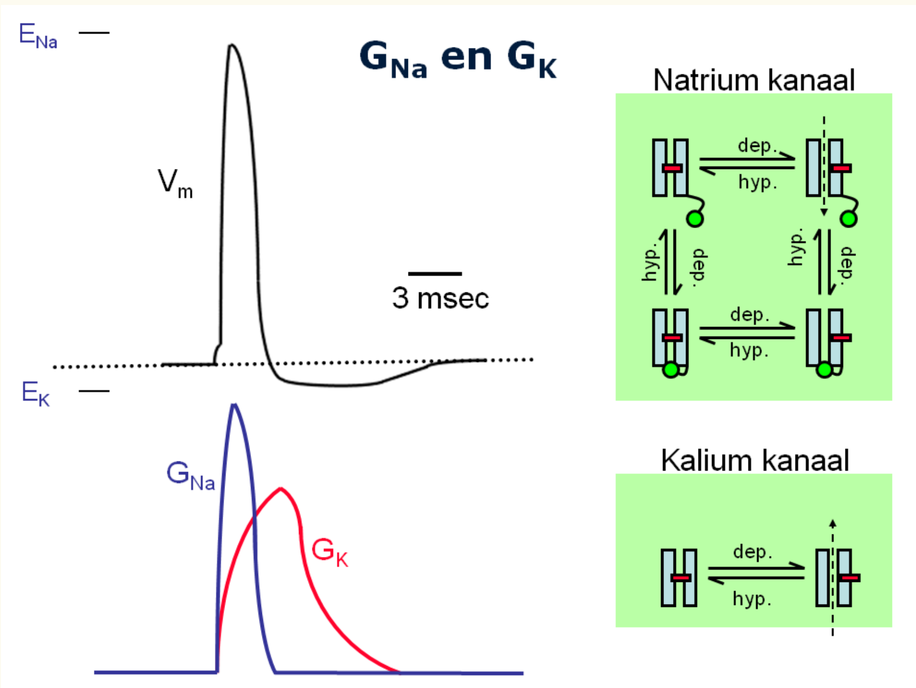
b. Hieronder is een grafiek van het spanningsverloop van een actiepotentiaal over een membraan aangegeven als functie van de tijd.



Geef nauwkeurig aan hoe de kalium- en natrium-poorten werken tijdens de verschillende fases A-B-C-D van de actiepotentiaal.

- **Antwoord**

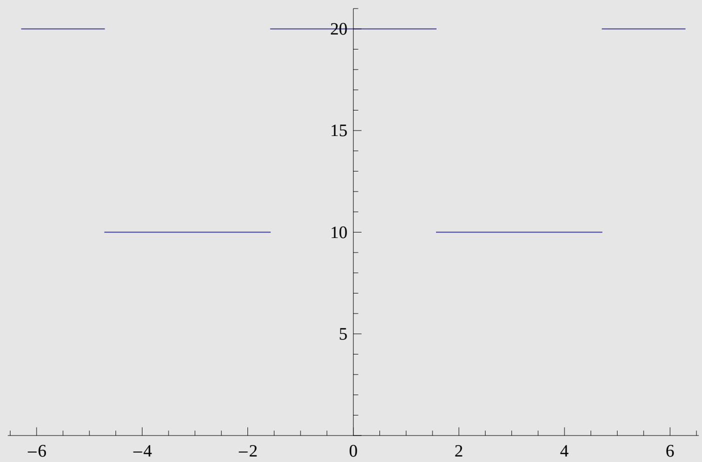
Zie het schema voor de Natrium en Kalium kanalen hieronder.



Vraag 4

Een MRI excitatie-spoel (een elektromagneet in het MRI systeem gewikkeld om een buis waarin de patient ligt) wordt met een periodieke blokspanning gevoed, om hem periodiek snel aan en uit te schakelen. Deze ziet er als volgt uit (spanning als functie van de tijd):

```
Plot[5 Sign[Cos[t]] + 15, {t, -2 π, 2 π}, PlotRange → {0, 21}]
```



De periodieke functie is 10 Volt van $t = -\pi$ tot en met $t = -\pi/2$, is 20 Volt van $t = -\pi/2$ tot en met $t = \pi/2$, en is 10 Volt van $t = \pi/2$ tot en met $t = \pi$. Een periode loopt van van -π tot +π.

a. Bereken de Fourier coefficienten a_0, a_k en b_l.

Antwoord

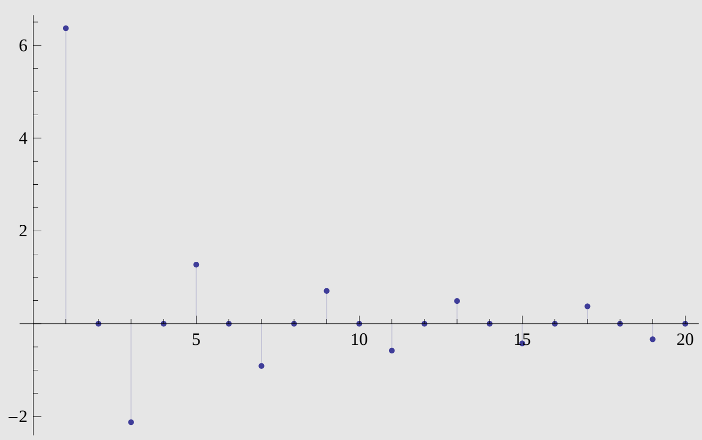
$a_0 = 15$

Dit is direct duidelijk uit de grafiek van de functie.

$$a_k = \text{Simplify}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi/2} 10\,\text{Cos}[k\,x]\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 20\,\text{Cos}[k\,x]\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} 10\,\text{Cos}[k\,x]\,dx,\ k \in \text{Integers}\right]$$

$$\frac{20\,\text{Sin}\left[\frac{k\pi}{2}\right]}{k\,\pi}$$

$$\text{ListPlot}\left[\text{Table}\left[\frac{20\,\text{Sin}\left[\frac{k\pi}{2}\right]}{k\,\pi}, \{k, 1, 20\}\right], \text{Filling} \to \text{Axis}, \text{PlotRange} \to \text{All}\right]$$

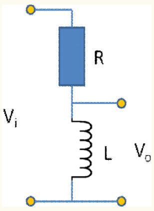


De sinus termen zijn alle nul:

$$b_l = \text{Simplify}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi/2} 10\,\text{Sin}[l\,x]\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 20\,\text{Sin}[l\,x]\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} 10\,\text{Sin}[l\,x]\,dx,\ l \in \text{Integers}\right]$$

0

b. Men sluit dit bloksignaal Vi(t) vervolgens aan via een serieweerstand R van 100 Ohm op de MRI spoel L, die een impedantie van 10 Henry heeft, zie het schema hieronder. Met meet over de spoel de spanning V0(t).



De basis frequentie van het bloksignaal is 50 perioden per seconde. De MRI spoel verandert het signaal, en we gaan dat modelleren via de Fourier coefficienten.

Hoe veranderen de Fouriercoefficienten van het signaal V0(t) dat gemeten wordt over de spoel ten opzichte van het signaal Vi(t) wat we erop zetten?

Antwoord

De RL schakeling werkt als een spanningsdeler. De spanning V_0 is $\frac{Z_L}{R+Z_L}$ gedeelte van V_i.

$$v_0 = \frac{i\,\omega\,L}{R + i\,\omega\,L}\,v_i$$

De amplitude van het signaal verandert met de *grootte* van deze overdrachtsfunctie, en is een functie van de frequentie ω :

$$\left|\frac{v_0}{v_i}\right| = \sqrt{\frac{i\,\omega\,L}{R+i\,\omega\,L}\;\frac{-i\,\omega\,L}{R+-i\,\omega\,L}} = \sqrt{\frac{L^2\,\omega^2}{R^2+L^2\,\omega^2}}\,.$$

$$\sqrt{\frac{i\,\omega\,L}{R + i\,\omega\,L}\;\frac{-i\,\omega\,L}{R + -i\,\omega\,L}}\ \text{// Simplify}$$

$$\sqrt{\frac{L^2\,\omega^2}{R^2 + L^2\,\omega^2}}$$

Met $\omega = 50 \times 2\,\pi$, $L = 10$ en $R = 100$, worden de eerste vijf Fourier coefficienten als volgt verzwakt:

```
Table[Sqrt[(10^2 ω^2)/(100^2 + 10^2 ω^2)], {ω, 1, 5}]
```

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{101}}, \frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{109}}, \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$$