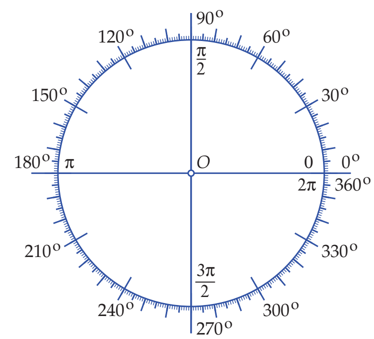
Voorkennis

Hoekmeting

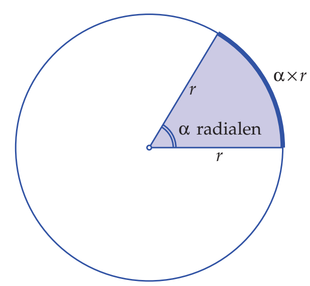
Hoeken meten we in *graden* of in *radialen*. Hiernaast zie je de eenheidscirkel in het vlak (de cirkel met straal 1 en de oorsprong O als middelpunt) waarop de beide verdelingen zijn aangegeven. Een volledige rondgang telt 360 graden, oftewel 2π radialen.



Ook draaiingshoeken kunnen we in graden of in radialen meten. De *draaiingsrichting* is dan wel van belang: volgens afspraak geven we draaiingen in het vlak tegen de klok in met een plusteken aan, en draaiingen met de klok mee met een minteken.

Bij draaiingen kan de draaiingshoek natuurlijk ook groter dan 360° zijn. Voor het resultaat maakt het niets uit of je er gehele veelvouden van 360° (of 2π radialen) bij optelt of van aftrekt.

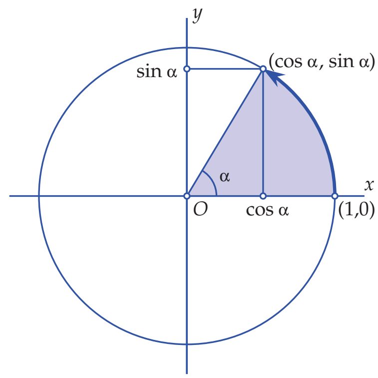
De term *radiaal* komt van *radius*, hetgeen straal betekent. Wanneer je op een cirkel met straal r een boog tekent die vanuit het middelpunt onder een hoek van α radialen wordt gezien, is de lengte van die boog $\alpha \times r$. De hoekmaat in radialen geeft dus de verhouding tussen de booglengte en de straal, vandaar de naam radiaal. Een hoek van 1 radiaal is iets kleiner dan 60 graden, namelijk, in acht decimalen nauwkeurig, 57.29577950 graden. De exacte waarde is $360/(2\pi)$.



Bij een cirkel met straal $r = 1$ is de booglengte precies *gelijk* aan de middelpuntshoek α in radialen. Bij een volledige rondgang langs een cirkel hoort een draaiingshoek van 2π radialen. De omtrek van de eenheidscirkel is dus ook gelijk aan 2π. De omtrek van een cirkel met een straal r is $2\pi r$.

De sinus, de cosinus en de tangens

Bij elke draaiingshoek α hoort een draaiing in het vlak om de oorsprong over die hoek. Een positieve draaiingshoek correspondeert met een draaiing tegen de klok in, een negatieve hoek hoort bij een draaiing met de klok mee. We kunnen zo'n draaiing aangeven via een boog van de eenheidscirkel die in $(1, 0)$ begint en middelpuntshoek α heeft. De coördinaten (x, y) van het eindpunt zijn dan respectievelijk de *cosinus* en de *sinus* van α, dus $x = \cos\alpha$ en $y = \sin\alpha$.



Omdat (x, y) op de eenheidscirkel ligt, geldt $x^2 + y^2 = 1$, dus

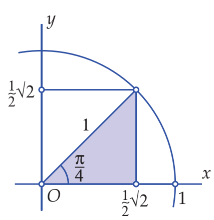
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Let hierbij op de notatie: $\cos^2\alpha$ betekent $(\cos\alpha)^2$ en $\sin^2\alpha$ betekent $(\sin\alpha)^2$. Deze notatievormen zijn algemeen gebruikelijk.

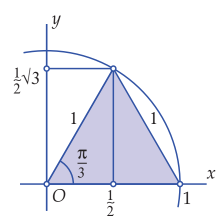
De *tangens* van α is het quotiënt van de sinus en de cosinus, in formule:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

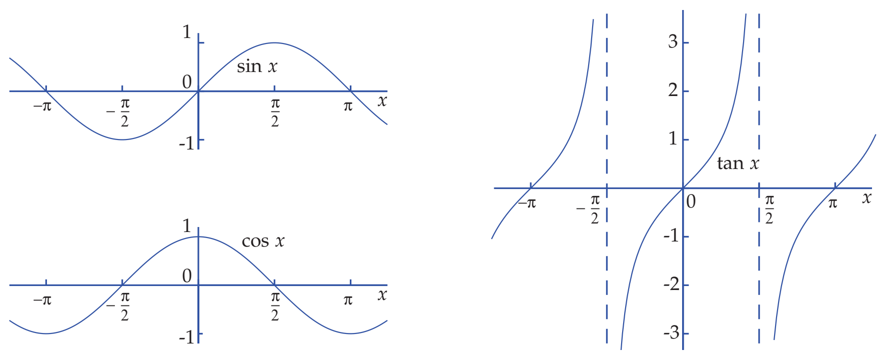
Er zijn enige hoeken α met bijzondere waarden voor de sinus, de cosinus en de tangens. Voor $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ (in radialen) geven we ze in de vorm van een tabel. Uit de beide tekeningen kun je die waarden afleiden. Bedenk daarbij dat de linkerdriehoek de vorm heeft van een 'geodriehoek' met een schuine zijde van lengte 1 en rechthoekszijden van lengte $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (stelling van Pythagoras). De rechterdriehoek is gelijkzijdig met zijden van lengte 1. De verticale lijn vanuit de top deelt de basis middendoor, en volgens Pythagoras is de lengte ervan dus gelijk aan $\sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.



α	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–



Grafieken van goniometrische functies



Hierboven zijn de grafieken getekend van de functies $\sin x$, $\cos x$ en $\tan x$, met x in radialen. Die functies zijn *periodiek*: de sinus en de cosinus met periode 2π, de tangens met periode π. De tangens heeft verticale asymptoten voor $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ met k geheel, want voor die waarden van x is de cosinus nul, en dan is $\tan x = (\sin x)/(\cos x)$ dus niet gedefinieerd.

Uit de definitie van de sinus, de cosinus en de tangens met behulp van de eenheidscirkel (zie bladzijde 66) volgen direct de volgende eigenschappen, die je ook in de grafieken terugziet:

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x, \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

Optelformules en dubbele-hoekformules

Naast de basisformule $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ en de 'symmetrieformules' van hierboven zijn er nog twee belangrijke gonioformules:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

Als je in deze optelformules β vervangt door $-\beta$ krijg je

$$\begin{aligned} \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

Als je in de optelformules $\alpha = \beta$ neemt, krijg je de *dubbele-hoekformules*:

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}$$

Met behulp van $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ kun je de formule voor $\cos 2\alpha$ uitbreiden tot

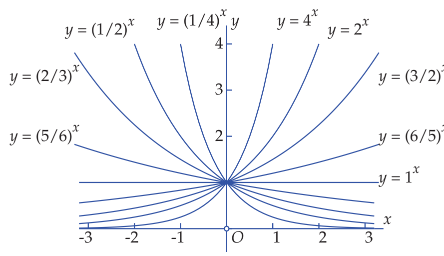
$$\cos 2\alpha \;=\; \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \;=\; 2\cos^2\alpha - 1 \;=\; 1 - 2\sin^2\alpha$$

Exponentiële functies en de e-macht

Functies van de vorm $f(x) = a^x$ voor $a > 0$ heten *exponentiële functies*. Hieronder is voor enige waarden van a de grafiek van a^x getekend. Al die grafieken gaan door het punt $(0, 1)$ want voor elke a geldt $a^0 = 1$.

Zo'n grafiek is stijgend als $a > 1$, en dalend als $0 < a < 1$. Voor $a = 1$ is de grafiek de horizontale lijn $y = 1$ want $1^x = 1$ voor elke waarde van x.
De grafieken van a^x en $(1/a)^x$ zijn elkaars spiegelbeeld in de y-as. Er geldt namelijk

$$(1/a)^x = \left(a^{-1}\right)^x = a^{-x}$$

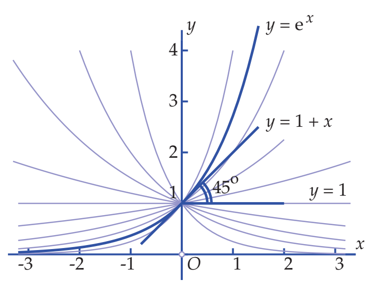


De belangrijkste eigenschappen van exponentiële functies zijn

$$\begin{aligned} a^x \times a^y &= a^{x+y} \\ a^x : a^y &= a^{x-y} \\ (a^x)^y &= a^{x \times y} \\ (a \times b)^x &= a^x \times b^x \\ (a : b)^x &= a^x \; : \; b^x \end{aligned}$$

De grafieken van de exponentiële functies van de vorm $f(x) = a^x$ met $a > 0$ snijden de y-as allemaal in het punt $(0, 1)$. Alle grafieken hebben in dat punt een raaklijn. Al die raaklijnen zijn verschillend, en allemaal hebben ze een vergelijking van de vorm $y = 1 + mx$ voor een zekere m.

Er is precies één waarde van a waarvoor geldt $m = 1$, dat wil zeggen dat de lijn $y = 1 + x$ de raaklijn is aan de grafiek van $f(x) = a^x$ in $(0, 1)$. Dat getal wordt e genoemd, en de bijbehorende functie $f(x) = \mathrm{e}^x$ speelt een belangrijke rol in de differentiaal- en integraalrekening. Hiernaast is de grafiek ervan getekend. Men kan bewijzen dat het getal e, net als het getal π of het getal $\sqrt{2}$, een *irrationaal* getal is. Er geldt $\mathrm{e} = 2.718281828459\ldots$.



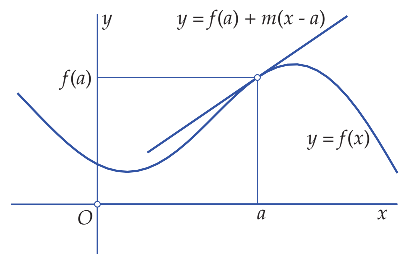
Voor kleine waarden van x vallen de grafiek van $f(x) = \mathrm{e}^x$ en de raaklijn $y = 1 + x$ vrijwel samen, dus voor kleine x geldt $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$. Zelfs geldt dat $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \approx 1$ voor $x \approx 0$, of, nog preciezer uitgedrukt met behulp van een limiet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

Raaklijn en afgeleide

(De voorkennis in deze paragraaf wordt alleen in hoofdstuk 5 gebruikt.)
De grafieken van veel functies hebben in alle of bijna alle punten een 'glad' verloop: als je steeds sterker op zo'n punt inzoomt, gaat de grafiek steeds meer op een rechte lijn lijken. Die lijn is de raaklijn aan de grafiek in dat punt.

Hiernaast is de grafiek van zo'n functie $f(x)$ getekend, met daarbij ook de raaklijn in het punt $(a, f(a))$. Vlak in de buurt van dat punt zijn grafiek en raaklijn inderdaad nauwelijks van elkaar te onderscheiden.
Als de raaklijn niet verticaal is, kan de vergelijking ervan geschreven worden als $y = f(a) + m(x - a)$ voor een zekere m, de richtingscoëfficiënt van de raaklijn.



Die richtingscoëfficiënt m kan dan door middel van een limiet in termen van de functie $f(x)$ en het punt a worden uitgedrukt:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Men noemt m de *afgeleide* van $f(x)$ in a, en gebruikt daarvoor de notatie $f'(a)$. Als deze limiet bestaat (als eindig getal), heet de functie $f(x)$ *differentieerbaar* in a.

Wanneer een functie $f(x)$ differentieerbaar is in alle punten van een interval, is de afgeleide dus in elk punt van dat interval gedefinieerd, en daarmee is de afgeleide op dat interval zelf een functie geworden, de *afgeleide functie*. Veel gebruikte notaties voor de afgeleide functie van $f(x)$ zijn $f'(x)$ en $\dfrac{d}{dx}f(x)$.

De afgeleide functies van enige veel gebruikte functies zijn:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^p) &= p\,x^{p-1} \quad \text{voor elke } p \\
\frac{d}{dx}(\mathrm{e}^x) &= \mathrm{e}^x \\
\frac{d}{dx}(\cos x) &= -\sin x \\
\frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x
\end{aligned}$$

De e-machtfunctie is dus gelijk aan zijn eigen afgeleide! Let ook op de tekens bij de afgeleiden van de sinus en de cosinus.

Wanneer een functie $f(x)$ differentieerbaar is in alle punten van een interval, kan de afgeleide functie ook weer een differentieerbare functie zijn. De afgeleide van de afgeleide heet dan de *tweede afgeleide*. Notatie: $f''(x)$ of $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$. Zo kun je doorgaan en de n-de afgeleide definiëren voor elke $n > 2$. Gebruikelijke notaties zijn in dat geval $f^{(n)}(x)$ (let op de haakjes om de n) of $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$.

Gonio gemakkelijk gemaakt

Eulers gemakkelijk te onthouden formule

$$e^{\,i\,\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi$$

maakt het makkelijk alle gonioformules te onthouden, of snel af te leiden als je ze vergeten bent. Bijvoorbeeld de somformules van bladzijde 67:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

Bedenk hiervoor dat $e^{\,i\,(\alpha+\beta)} = e^{\,i\,\alpha}e^{\,i\,\beta}$ dus

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) + i\,\sin(\alpha+\beta) &= e^{\,i\,(\alpha+\beta)} = e^{\,i\,\alpha}e^{\,i\,\beta} \\ &= (\cos\alpha + i\,\sin\alpha)(\cos\beta + i\,\sin\beta) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i\,(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \end{aligned}$$

Gelijkstellen van de reële delen levert de somformule voor de cosinus, en gelijkstellen van de imaginaire delen de somformule voor de sinus.

Deze formules gelden overigens niet alleen maar voor de reële cosinus- en sinusfuncties, maar net zo goed voor de op bladzijde 21 gedefinieerde complexe uitbreidingen van deze functies:

$$\begin{aligned} \cos(z_1+z_2) &= \cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2 \\ \sin(z_1+z_2) &= \sin z_1\cos z_2 + \cos z_1\sin z_2 \end{aligned}$$

Probeer zelf maar eens een bewijs te geven!

Ook de formules voor de afgeleiden van de sinus- en cosinusfuncties zijn gemakkelijk snel af te leiden via de complexe e-machtfunctie, die, net als de reële e-machtfunctie, gelijk is aan zijn eigen afgeleide. Bedenk daarvoor dat op grond van de kettingregel geldt dat $\dfrac{d}{dx}e^{\,i\,x} = i\,e^{\,i\,x}$, en dus is

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\cos x + i\,\sin x) &= \frac{d}{dx}e^{\,i\,x} = i\,e^{\,i\,x} = i\,(\cos x + i\,\sin x) \\ &= -\sin x + i\,\cos x \end{aligned}$$

Gelijkstellen van reële delen geeft $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ en gelijkstellen van de imaginaire delen geeft $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$.