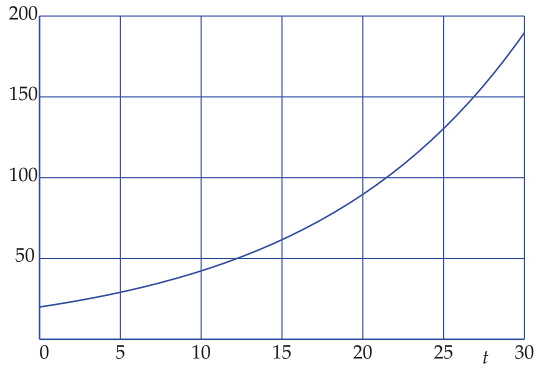
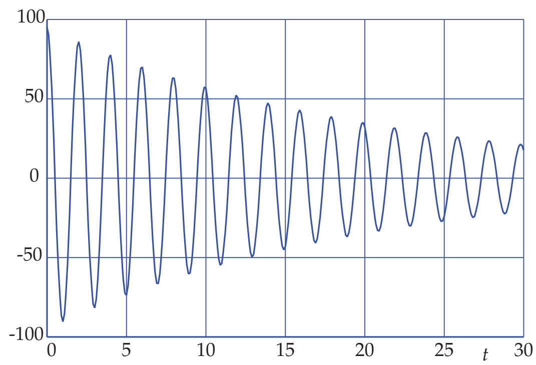
5 Lineaire differentiaalvergelijkingen

In veel toepassingen in de techniek en de exacte wetenschappen wordt gewerkt met *differentiaalvergelijkingen* om continue processen te modelleren. Het gaat dan meestal om een functie $y(t)$ die een grootheid beschrijft die in de tijd varieert. In zo'n model kunnen wetmatigheden in het proces uitgedrukt worden in vergelijkingen waarin naast de functie $y(t)$ zelf ook de afgeleiden $y'(t)$, $y''(t), \ldots$ voorkomen. Men spreekt dan over differentiaalvergelijkingen. De *orde* van zo'n differentiaalvergelijking wordt bepaald door de hoogste afgeleide die erin voorkomt. Bij differentiaalvergelijkingen van de eerste orde komt naast $y(t)$ alleen $y'(t)$ voor, bij differentiaalvergelijkingen van de tweede orde speelt ook $y''(t)$ mee enzovoort. In dit hoofdstuk bespreken we zogenaamde *lineaire* differentiaalvergelijkingen. Net als bij de lineaire recursies kun je ook hier een *karakteristieke vergelijking* opstellen waarvan de wortels bepalend zijn voor het gedrag van de oplossingen. En ook hier kun je met complexe getallen de oplossingsfuncties (nu zijn het oplossingsfuncties en niet oplossingsrijen) gemakkelijk bepalen.

5 Lineaire differentiaalvergelijkingen



Een voorbeeld van een continu exponentieel groeimodel, gegeven door de differentiaalvergelijking $y'(t) = ay(t)$*. Hier is* $y(0) = 20$ *en* $a = 0.075$*.*



Een voorbeeld van een gedempte trilling bij een massa-veersysteem met als differentiaalvergelijking $mu''(t) + du'(t) + ku(t) = 0$*. Hier is* $m = 1$, $d = 0.1$, $k = 10$ *genomen met beginwaarden* $u(0) = 95$ *en* $u'(0) = -1$*.*

Inleiding

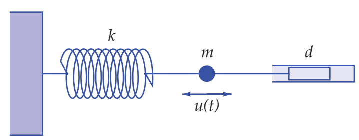
Een vergelijking waarin naast een functie $y(t)$ ook nog een of meer afgeleiden van $y(t)$ voorkomen, heet een differentiaalvergelijking. Een van de eenvoudigste voorbeelden is de differentiaalvergelijking

$$y'(t) = ay(t)$$

die voor $a > 0$ continue exponentiële groei modelleert. Een *oplossing* is een functie $y(t)$ die voor alle t aan de differentiaalvergelijking voldoet. In het algemeen zijn er oneindig veel oplossingen, die in dit geval allemaal van de vorm $y(t) = A\,\mathrm{e}^{at}$ zijn. Een *startwaarde*, bijvoorbeeld $y(0)$, legt de constante A vast.

In dit hoofdstuk behandelen we zogenaamde lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde, dat wil zeggen dat er naast $y(t)$ ook nog de eerste afgeleide $y't)$ en de tweede afgeleide $y''(t)$ in voorkomen. Een natuurkundig voorbeeld waarin zo'n differentiaalvergelijking gebruikt wordt, is het zogenaamde *massa-veersysteem*.

Stel dat een puntmassa m bevestigd is aan een veer met veerconstante k en een demper met wrijvingsfactor d. Onder $u(t)$ verstaan we de uitwijking van de massa vanuit de evenwichtsstand op tijdstip t.

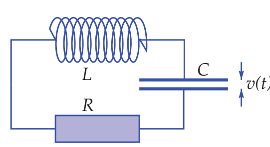


De massa is dan onderhevig aan twee terugdrijvende krachten: de veerkracht die evenredig is aan de uitwijking $u(t)$ en de dempingskracht die evenredig is met de snelheid $u'(t)$. Volgens de wet van Newton is de som van die krachten gelijk aan de massa m maal de versnelling $u''(t)$, dus $mu''(t) = -ku(t) - du'(t)$ oftewel

$$mu''(t) + du'(t) + ku(t) = 0$$

Wanneer men zo'n systeem op $t = 0$ een bepaalde beginuitwijking $u(0)$ en beginsnelheid $u'(0)$ geeft, zal het een gedempte trilling gaan uitvoeren.

Een ander voorbeeld komt uit de electrotechniek. In een stroomkring zijn een weerstand R, een condensator met capaciteit C en een inductiespoel met zelfinductie L in serie geschakeld. We meten het spanningsverschil $v(t)$ over de condensator.



Men kan aantonen dat $v(t)$ dan voldoet aan de differentiaalvergelijking

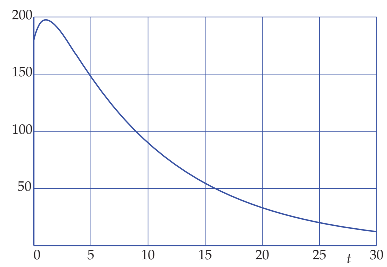
$$LCv''(t) + RCv'(t) + v(t) = 0$$

Ook hier is het zo dat het systeem bij gegeven beginwaarden $v(0)$ en $v'0)$ een gedempte trilling gaat uitvoeren. In dit hoofdstuk zullen we algemene formules afleiden voor de oplossingsfuncties van dit soort differentiaalvergelijkingen.

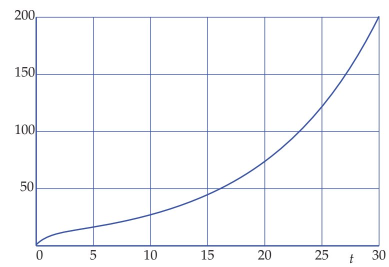
Hieronder zie je enige voorbeelden van grafieken van oplossingsfuncties van lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde van de vorm

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

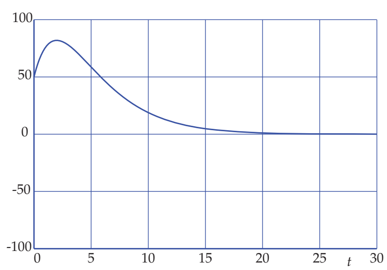
De grafieken geven een indruk van de grote verscheidenheid aan verschijningsvormen van zulke oplossingsfuncties. Telkens zijn de waarden van a, b en c en de beginwaarden $y(0)$ en $y'(0)$ gegeven.



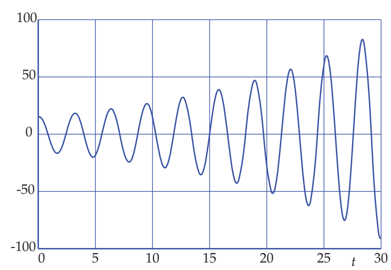
$a = 1, b = 1.1, c = 0.1$
$y(0) = 180, y'(0) = 40$



$a = 1, b = 0.9, c = -0.1$
$y(0) = 1, y'(0) = 10$



$a = 1, b = 0.7, c = 0.1225$
$y(0) = 50, y'(0) = 40$



$a = 1, b = -0.12, c = 4$
$y(0) = 15, y'(0) = 5$

5.1 Bereken bij elk van de vier hierboven gegeven differentiaalvergelijkingen de wortels en de discriminant van de karakteristieke vergelijking.

Lineaire differentiaalvergelijkingen van orde 2

Een differentiaalvergelijking van de vorm

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

waarbij a, b en c willekeurige gegeven reële constanten zijn met $a \neq 0$, heet een *lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde*. Eigenlijk is de volledige term: *lineaire homogene differentiaalvergelijking van de tweede orde met constante coëfficiënten* maar wij zullen die uitgebreide terminologie hier niet gebruiken en ook niet toelichten. Omdat $a \neq 0$ is, kunnen we de vergelijking delen door a, met andere woorden, we kunnen veronderstellen dat $a = 1$. Met het oog op de vele toepassingen waarin a, b en c vaak een specifieke fysische betekenis hebben, zullen we dit hier echter niet doen.

We zullen in dit hoofdstuk een algemene oplossingsmethode presenteren, dat wil zeggen een methode waarmee je een formule kunt vinden voor $y(t)$ in termen van a, b en c en zekere *startwaarden*, die hier de vorm hebben van $y(0) = y_0$ en $y'(0) = m_0$. Met andere woorden, op het tijdstip $t = 0$ zijn de functiewaarde $y(0)$ en de afgeleide $y'(0)$ gegeven. We zullen zien dat daardoor de oplossingsfunctie $y(t)$ volledig wordt bepaald.

Het idee is als volgt. We laten de startwaarden voorlopig even terzijde, en concentreren ons op de differentiaalvergelijking zelf. Geïnspireerd door het continue exponentiële groeimodel proberen we of er oplossingsfuncties zijn van de vorm $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ is de Griekse letter 'lambda'). Invullen in de differentiaalvergelijking geeft dan $a\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t} + b\lambda\mathrm{e}^{\lambda t} + c\mathrm{e}^{\lambda t} = 0$, oftewel, na delen door $\mathrm{e}^{\lambda t}$,

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Dit is de *karakteristieke vergelijking* van de differentiaalvergelijking. Elke wortel λ geeft een oplossing $\mathrm{e}^{\lambda t}$. Je ziet dat in de karakteristieke vergelijking de variabele t niet meer voorkomt! Het is een zuiver algebraïsche vergelijking. De aard van de oplossingen wordt bepaald door het teken van de discriminant $D = b^2 - 4ac$. Als $D > 0$ is, zijn de twee wortels reëel, als $D = 0$ zijn ze reëel en vallen ze samen, en als $D < 0$ zijn ze toegevoegd complex.

We behandelen de drie gevallen $D > 0$, $D = 0$ en $D < 0$ aan de hand van voorbeelden. Maar eerst merken we op dat voor lineaire differentiaalvergelijkingen ook weer het *superpositiebeginsel* geldt: als $y_1(t)$ en $y_2(t)$ allebei oplossingsfuncties zijn, dan is voor elke keuze van A_1 en A_2 ook de *lineaire combinatie* $z(t) = A_1y_1(t) + A_2y_2(t)$ een oplossingsfunctie. Je kunt dit zelf gemakkelijk nagaan.

Positieve discriminant

Als $D = b^2 - 4ac > 0$ is, zijn er twee verschillende reële oplossingen λ_1 en λ_2 van de karakteristieke vergelijking, en de algemene oplossing heeft dan de gedaante

$$y(t) = A_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + A_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

Merk op dat

$$y'(t) = \lambda_1 A_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \lambda_2 A_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

en dus geldt $y(0) = A_1 + A_2$ en $y'(0) = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$.

Neem bijvoorbeeld de differentiaalvergelijking

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0$$

De wortels van de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ zijn $\lambda_1 = 2$ en $\lambda_2 = -1$. Wanneer hierbij de startwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = -2$ gegeven zijn, kun je A_1 en A_2 oplossen uit de vergelijkingen $A_1 + A_2 = 1$ en $2A_1 - A_2 = -2$. De oplossing van dit stelsel is $A_1 = -\frac{1}{3}$ en $A_2 = \frac{4}{3}$. De oplossingsfunctie is dus

$$y(t) = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t} + \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t}$$

Discriminant nul

Als $D = b^2 - 4ac = 0$ is, is er maar één oplossing, namelijk $\lambda = -\frac{b}{2a}$. Naast de basisoplossingsfunctie $y_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ is er dan ook een basisoplossingsfunctie $y_2(t) = t\mathrm{e}^{\lambda t}$. De algemene oplossing is dan

$$y(t) = A_1\mathrm{e}^{\lambda t} + A_2 t\mathrm{e}^{\lambda t} = (A_1 + tA_2)\,\mathrm{e}^{\lambda t}$$

Neem bijvoorbeeld de differentiaalvergelijking

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$$

De enige oplossing van de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ is $\lambda = -2$ en de algemene oplossingsfunctie is dus

$$y(t) = (A_1 + tA_2)\,\mathrm{e}^{-2t}$$

Wanneer hierbij de startwaarden $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$ gegeven zijn, vinden we $A_1 = -1$ en $A_2 = -2$ (controleer!), dus dan is de gezochte oplossingsfunctie

$$y(t) = (-1 - 2t)\,\mathrm{e}^{-2t}$$

Negatieve discriminant

We beginnen met een voorbeeld, namelijk de differentiaalvergelijking

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 0$$

Deze heeft als karakteristieke vergelijking

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

met discriminant $D = 4 - 20 = -16 < 0$. De twee wortels zijn $\lambda_1 = 1 + 2\,\mathrm{i}$ en $\lambda_2 = 1 - 2\,\mathrm{i}$, en de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is dus (vergelijk ook paragraaf op bladzijde 43)

$$\begin{aligned}
y(t) &= A_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + A_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} = A_1\,\mathrm{e}^{(1+2\,\mathrm{i})t} + A_2\,\mathrm{e}^{(1-2\,\mathrm{i})t} \\
&= \mathrm{e}^{t}\left(A_1\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,t} + A_2\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,t}\right) \\
&= \mathrm{e}^{t}\big((A_1 + A_2)\cos 2t + \mathrm{i}\,(A_1 - A_2)\sin 2t\big) \\
&= \mathrm{e}^{t}\,(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)
\end{aligned}$$

Kies je voor C_1 en C_2 reële constanten, dan is de oplossingsfunctie ook reëel. In dat geval is $A_1 = \frac{1}{2}(C_1 - \mathrm{i}\,C_2)$ en $A_2 = \frac{1}{2}(C_1 + \mathrm{i}\,C_2)$ (vergelijk bladzijde 45) dus dan zijn A_1 en A_2 toegevoegd complex.

De oplossingsfunctie $y(t)$ kun je dan ook schrijven als het product van een e-macht en een standaardsinusoïde. Dat is voor de toepassingen, waarin uit de standaardvorm van een sinusoïde belangrijke constanten zoals de amplitude en de fasehoek kunnen worden gehaald, vaak van groot belang. Schrijf daartoe $A_1 = r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\chi}$ en $A_2 = r\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\chi}$ (χ is de Griekse letter ‘chi’). Dan is

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathrm{e}^{t}\left(A_1\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,t} + A_2\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,t}\right) = \mathrm{e}^{t}\left(r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\chi}\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,t} + r\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\chi}\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,t}\right) \\
&= r\,\mathrm{e}^{t}\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(2t+\chi)} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,(2t+\chi)}\right) = 2r\,\mathrm{e}^{t}\cos(2t + \chi)
\end{aligned}$$

Voor een willekeurige differentiaalvergelijking met een karakteristieke vergelijking met een negatieve discriminant met wortels $\lambda_{1,2} = p \pm \mathrm{i}\,q$ kan de algemene reële oplossing geschreven worden als

$$y(t) = \mathrm{e}^{pt}\,(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt) = 2r\,\mathrm{e}^{pt}\cos(qt + \chi)$$

waarbij $C_1 - \mathrm{i}\,C_2 = 2A_1 = 2r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\chi}$. Bij gegeven startwaarden $y(0)$ en $y'(0)$ geldt $y(0) = C_1$ en $y'(0) = pC_1 + qC_2$ dus $C_2 = -\frac{p}{q}y(0) + \frac{1}{q}y'(0)$.

Lineaire differentiaalvergelijkingen van hogere orde

Wat we voor lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde hebben gedaan, kunnen we ook voor lineaire differentiaalvergelijkingen van hogere orde doen. Zo'n vergelijking heeft de vorm

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

Een oplossingsfunctie $y(t)$ wordt vastgelegd door n beginvoorwaarden $y(0)$, $y'(0)$, ..., $y^{(n-1)}(0)$ en de karakteristieke vergelijking is nu van de graad n, namelijk

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Wanneer deze vergelijking n verschillende (reële of complexe) wortels heeft, leveren die n basisoplossingsfuncties, waaruit door lineaire combinaties de algemene oplossing kan worden gevormd. Wanneer een wortel λ multipliciteit m heeft met $m > 1$, dan zijn de volgende m functies basisoplossingsfuncties:

$$e^{\lambda t}, \quad t\,e^{\lambda t}, \quad \ldots, \quad t^{m-1}\,e^{\lambda t}$$

Op deze manier leveren de oplossingen van de karakteristieke vergelijking dus in alle gevallen n basisoplossingen waarmee de algemene oplossing kan worden gevormd.

Realistische modellen

Wanneer een lineaire differentiaalvergelijking een wiskundig model is van een proces waarin de evolutie in de tijd van een grootheid y gemodelleerd wordt als een differentieerbare functie $y(t)$ die op elk tijdstip t aan de differentiaalvergelijking voldoet, wordt die evolutie volledig bepaald door de differentiaalvergelijking en de n beginvoorwaarden. In zulke situaties zal het systeem op den duur naar de ruststand terugkeren, dat wil zeggen dat $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. Dit is het geval als alle wortels λ van de karakteristieke vergelijking, reëel of complex, voldoen aan $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, met andere woorden, als ze in het linkerhalfvlak liggen. In 'realistische' modellen zal dit altijd het geval zijn.

Bij massa-veersystemen en bij stroomkringen met een weerstand, condensator en inductiespoel is dat altijd het geval als de dempingsfactor, respectievelijk de weerstand, positief is. In de geïdealiseerde toestand zonder demping of weerstand blijft het systeem eeuwig oscilleren volgens een sinusoïde (harmonische trilling).

Samenvatting

Een homogene lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde met constante (reële) coëfficiënten a, b en c (waarbij $a \neq 0$) voor een functie $y(t)$ kan geschreven worden als

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

Karakteristieke vergelijking: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

Oplossingen via de abc-formule: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Discriminant $D = b^2 - 4ac$. Drie gevallen:

1. $D > 0$. Dan heeft de karakteristieke vergelijking twee verschillende reële oplossingen λ_1 en λ_2. Basisoplossingen van de differentiaalvergelijking zijn dan $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ en $\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$. De algemene oplossing is

$$y(t) = A_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + A_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

Bij gegeven startwaarden $y(0)$ en $y'(0)$ kun je A_1 en A_2 vinden met behulp van de afgeleide

$$y'(t) = A_1\lambda_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + A_2\lambda_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

door $t = 0$ in te vullen in de uitdrukkingen voor $y(t)$ en $y'(t)$. Dit geeft twee vergelijkingen voor de twee onbekenden A_1 en A_2 en daaruit kun je A_1 en A_2 oplossen.

2. $D = 0$. Dan heeft de karakteristieke vergelijking één oplossing $\lambda = -\frac{b}{2a}$. Basisoplossingen van de differentiaalvergelijking zijn dan $\mathrm{e}^{\lambda t}$ en $t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$. De algemene oplossing is

$$y(t) = A_1\,\mathrm{e}^{\lambda t} + A_2 t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$$

Bij gegeven startwaarden $y(0)$ en $y'(0)$ kun je A_1 en A_2 vinden met behulp van de afgeleide door $t = 0$ in te vullen in $y(t)$ en $y'(t)$. Dit geeft twee vergelijkingen voor de twee onbekenden A_1 en A_2 en daaruit kun je A_1 en A_2 oplossen.

3. $D < 0$. Dan heeft de karakteristieke vergelijking twee toegevoegd complexe oplossingen $\lambda_1 = p + \mathrm{i}\,q$ en $\lambda_2 = p - \mathrm{i}\,q$. Basisoplossingen van de differentiaalvergelijking zijn $\mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \mathrm{e}^{pt}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,qt}$ en $\mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \mathrm{e}^{pt}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,qt}$. De algemene oplossing kan dan met behulp van de formules van Euler worden geschreven als

$$y(t) = \mathrm{e}^{pt}\,(C_1\,\cos qt + C_2\,\sin qt) = 2r\,\mathrm{e}^{pt}\cos(qt + \chi)$$

Bij gegeven startwaarden $y(0)$ en $y'(0)$ kun je C_1 en C_2 vinden met behulp van de afgeleide door $t = 0$ in te vullen in $y(t)$ en $y'(t)$. Dit geeft twee vergelijkingen voor de twee onbekenden C_1 en C_2. Desgewenst kun je daarna ook r en χ berekenen via de betrekking $C_1 - \mathrm{i}\,C_2 = 2r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\chi}$.