TENTAMEN CALCULUS

Vakcode: 2DM10. Datum: Woensdag 13 april 2011. Tijd: 09:00–12:00. Locatie: HG 10.30d

Lees dit eerst!

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering voor elke vraag is aangegeven in de kantlijn. Alle onderdelen van een vraag hebben hetzelfde gewicht.
- Het gebruik van boek, calculator, laptop of andere hulpmiddelen is niet toegestaan.
- De stervraag is facultatief en telt niet mee voor het eindcijfer. Een correct antwoord levert echter een bonuspunt voor het BMT honors programma.

SUCCES!

(15) **1.** COMPLEXE GETALLEN

a. Los op: $z^4 = 1$.

b. Los op: $e^{iz} = \sqrt{3} + i$. Geef je antwoord in de vorm $z = x + i\,y$ met $x, y \in \mathbb{R}$. (Hint: Schrijf eerst het rechterlid als een complexe e-macht.)

c. Bewijs: $\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$ voor $\theta \in \mathbb{R}$. Gebruik hiertoe eigenschappen van e^z, $z \in \mathbb{C}$.

♣

(20) **2.** DIFFERENTIËREN

a. Bewijs met behulp van de middelwaardestelling: $\tan x > x$ voor alle $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ en $\tan x < x$ voor alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$.

b. Geef het derde orde Taylorpolynoom $p_3(x)$ van $f(x) = \ln x - \cos(x - 1) - x + 2$ rond $x = 1$.

♣

z.o.z.

(25) **3.** PRIMITIVEREN EN INTEGREREN

a. Primitiveer: $\int 2^x \, dx$

b. Primitiveer: $\int e^x \cos x \, dx$ (Hint: Tweemaal partieel integreren)

c. Primitiveer: $\int \frac{x^5+1}{x+1} \, dx$

d. Integreer: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x \, dx$.

e. Integreer: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$. (Hint: Substitueer $y = x + \sqrt{1+x^2}$.)

♣

(40) **4.** DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

a. Laat zien dat de volgende differentiaalvergelijking, geldig voor $x > 0$, twee onafhankelijke oplossingen heeft van het type $y(x) = x^\lambda$, en bepaal de bijbehorende waarden van λ:

$$4\,x^2\,y'' - 4\,x\,y' + 3\,y = 0\,.$$

b. Los op: $y'' + 9\,y = 27$.

c. Laat zien dat $y(x) = c\,e^{\int_0^x f(s)\,ds}$ voor elke $c \in \mathbb{R}$ een oplossing is van $y' = f(x)\,y$. Hierin wordt verondersteld dat f een gegeven continue functie met domein $\mathbb{R}$ is.

d. Los op: $\begin{cases} y' + x\,y &= e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos x \quad (x \in \mathbb{R}) \\ y(0) &= 1 \end{cases}$

♣

($\star$) STEROPGAVE

Los op: $\begin{cases} y' + y + e^{-x}\int_0^x e^t\,y(t)\,dt &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \\ y(0) &= 1 \end{cases}$

(Hint: Leid hieruit een tweede orde differentiaalvergelijking af door nogmaals te differentiëren.)

THE END