TENTAMEN CALCULUS

Vakcode: 2DM10. Datum: Woensdag 25 januari 2012. Tijd: 09:00–12:00. Locatie: Paviljoen u46, j17, l10

Lees dit eerst!

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.
- Het tentamen bestaat uit 5 vragen. De waardering is aangegeven in de kantlijn.
- Het gebruik van boek, calculator, laptop of andere hulpmiddelen is niet toegestaan.
- Alle variabelen en functies zijn reëelwaardig tenzij uitdrukkelijk anders aangegeven.

Succes!

. . . .

DEFINITIES

$$\cosh x \overset{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x \overset{\text{def}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \exp x \overset{\text{def}}{=} e^x$$

$$n! \overset{\text{def}}{=} n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 \quad \text{with} \quad 0! \overset{\text{def}}{=} 1$$

. . . .

(10) **1.** VOLLEDIGE INDUCTIE

Bewijs voor $x < 1$ en geheeltallige $n \geq 0$ dat $\dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

*

(30) **2.** DIFFERENTIËREN & TAYLORONTWIKKELING

(10) **a.** Bewijs de Taylorontwikkeling $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$ rond $x=0$.

(10) **b.** Geef het derde orde Taylorpolynoom van $f(x) = \cosh\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$ rond $x=0$.

HINT: Schrijf $f(x) = \cosh(y(x))$ met $y(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ en merk op dat $f(y) = f(-y)$ en $y(x) = -y(-x)$.

(10) **c.** Bepaal de afgeleide f' van de functie f met functievoorschrift $f(x) = |x|^x$ voor $x \neq 0$.

HINT: $|x| = \exp(\ln|x|)$.

*

(30) **3.** PRIMITIVEREN EN INTEGREREN

(10) **a.** Primitiveer: $\int x\sqrt{1+x}\,dx$.

(10) **b.** Gegeven is de oneigenlijke integraal $I(\sigma, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx$.

Hierin zijn $a \in \mathbb{R}$ en $\sigma > 0$ reële parameters. Laat zien dat $I(\sigma, a)$ niet van a en σ afhangt.
HINT: Je mag aannemen dat $I(\sigma, a)$ bestaat, maar je hoeft zijn waarde niet uit te rekenen!

(10) **c.** Bepaal de oppervlakte $A(\epsilon)$ ingesloten door x-as en de grafieken van $x = \epsilon$, $x = 1$ en $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
Hierin geldt $0 < \epsilon < 1$. Bestaat $A(0) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} A(\epsilon)$? Zo ja, bepaal $A(0)$.

*

(15) **4.** INTEGRAALVERGELIJKINGEN

We bekijken de volgende integraalvergelijking voor $y(x)$: $y(x) = \ln p - \int_0^x e^{-y(t)} \sin t\, dt$.

(5) **a.** Laat zien dat de hierdoor impliciet gegeven functie $y = y(x)$ voor elke reële constante $p > 0$ voldoet aan de niet-lineaire differentiaalvergelijking $y' + e^{-y} \sin x = 0$.

(5) **b.** Bepaal de algemene oplossing $y(x)$ van deze differentiaalvergelijking.

($2\frac{1}{2}$) **c.** Bepaal de expliciete oplossing $y(x)$ van bovenstaande integraalvergelijking.

($2\frac{1}{2}$) **d.** Hoe moet je $p \in \mathbb{R}$ kiezen opdat de oplossing voor alle $x \in \mathbb{R}$ bestaat?

*

(15) **5.** DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

We bekijken het volgende inhomogene beginwaardenprobleem voor $y(x)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'' + 2y' + y & = & 2\cos x - 2\sin x \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

(5) **a.** Los de homogene vergelijking $y'' + 2y' + y = 0$ op. Noem de oplossing $y_{\mathrm{h}}(x)$.

(5) **b.** Vind een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking. Noem deze $y_{\mathrm{p}}(x)$.
HINT: Poneer een oplossing van het type $y_{\mathrm{p}}(x) = a\sin x + b\cos x$.

($2\frac{1}{2}$) **c.** Geef de algemene oplossing van de inhomogene vergelijking zonder beginvoorwaarden.

($2\frac{1}{2}$) **d.** Bepaal de oplossing van het volledige beginwaardenprobleem.

***