HERTENTAMEN CALCULUS

Vakcode: 2DM10. Datum: Donderdag 28 juni 2012. Tijd: 13:00–16:00. Locatie: CIC 1.03

Lees dit eerst!

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.
- Het tentamen bestaat uit 5 vragen. De waardering is aangegeven in de kantlijn.
- Het gebruik van boek, calculator, laptop of andere hulpmiddelen is niet toegestaan.
- Alle variabelen en functies zijn reëelwaardig tenzij uitdrukkelijk anders aangegeven.

Succes!

(10) 1. Volledige inductie

Bewijs voor $x \in \mathbb{R}$ en geheeltallige $k \geq 0$ dat $\dfrac{d^k}{dx^k}\,(x\,e^{cx}) = (c^k\,x + k\,c^{k-1})\,e^{cx}$. Hierin is $c \in \mathbb{R}$ een constante met $c \neq 0$.

Het geval $k=0$ is triviaal. Verder geldt

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\,(x\,e^{cx}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^k}{dx^k}\,(x\,e^{cx})\right) \overset{*}{=} \frac{d}{dx}\Big((c^k\,x + k\,c^{k-1})\,e^{cx}\Big) \overset{\star}{=} (c^{k+1}\,x + (k+1)\,c^k)\,e^{cx}\,.$$

Bij $*$ is de inductiehypothese gebruikt en in $\star$ de produkt- en kettingregel.

$*$

(30) 2. Differentiëren & Taylorontwikkeling

(10) **a.** Bewijs de Taylorontwikkeling

$$xe^x = x + x^2 + \frac{1}{2}\,x^3 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\,x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \quad \text{rond } x=0.$$

Voor het gemak schrijven we $f(x) = x\,e^x$. Volgens opgave 1 geldt $f^{(k)}(0) = k$ voor geheeltallige $k \geq 0$ en $c=1$, zodat ontwikkeling rond $x=0$ leidt tot

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\,f^{(k)}(0)\,x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}\,x^k + \mathcal{O}(x^{n+1})\,,$$

oftewel

$$x\,e^x = x + x^2 + \frac{1}{2}\,x^3 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\,x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})\,.$$

Een eenvoudig alternatief gaat uit van de Taylorontwikkeling van de standaard exponentiële functie rond $x=0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\,x^{n-1} + \mathcal{O}(x^n)\,.$$

Door links en rechts met x te vermenigvuldigen krijgen we dan hetzelfde resultaat als hierboven. (Merk op dat hierbij gebruik gemaakt wordt van de eigenschap $x\,\mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^{n+1})$ voor de restterm.)

(10) **b.** Bepaal de afgeleide van $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}\,(2x-1)^2$.

Produkt- en kettingregel toepassend vind je

$$f'(x) = -x\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,(2x-1)^2 + e^{-\frac{1}{2}x^2}\,4(2x-1) = e^{-\frac{1}{2}x^2}\,(2x-1)(-2x^2+x+4)\,.$$

(10) **c.** Bepaal de afgeleide van $f(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} e^{-t^2}\,dt$.

Schrijf $P(t)$ voor de primitieve van $p(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-t^2}$. Dan geldt

$$f'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dx}\int_{x-1}^{x+1} p(t)\,dt = \frac{d}{dx}\left(P(t)\Big|_{x-1}^{x+1}\right) = \frac{d}{dx}\left(P(x+1)-P(x-1)\right) \stackrel{\text{def}}{=} p(x+1)-p(x-1) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-(x+1)^2} - e^{-(x-1)^2}\,.$$

(De essentiële stap is gebaseerd op de hoofdstelling van de analyse. Je hebt de expliciete vorm van $P(t)$ dus niet nodig.)

$*$

(30) 3. Primitiveren en integreren

(10) **a.** Primitiveer: $\displaystyle\int \frac{\ln^3|x|}{x}\,dx$. (N.B. met $\ln^k|x|$ bedoelen we $(\ln|x|)^k$.)

Substitutie van variabele $y = \ln|x|$ levert

$$\int \frac{\ln^3|x|}{x}\,dx = \int y^3\,dy\Big|_{y=\ln|x|} = \frac{1}{4}y^4\Big|_{y=\ln|x|} + c = \frac{1}{4}\ln^4|x| + c\,.$$

Hierin is $c \in \mathbb{R}$ een integratieconstante.

(10) **b.** Integreer: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x + \sin^3 x + \sin^2 x + \sin x}{(\sin^2 x + 1)\tan x}\,dx$. (N.B. met $\sin^k x$ bedoelen we $(\sin x)^k$.)

Substitueer $y = \sin x$, dus $dy = \cos x\,dx$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x + \sin^3 x + \sin^2 x + \sin x}{(\sin^2 x + 1)\tan x}\,dx = \int_0^1 \frac{y^4+y^3+y^2+y}{(y^2+1)\,y}\,dy = \int_0^1 \frac{y^3+y^2+y+1}{y^2+1}\,dy \stackrel{*}{=} \int_0^1 (y+1)\,dy = \frac{1}{2}(y+1)^2\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\,.$$

De identiteit $*$ verkrijg je middels een staartdeling.

(10) **c.** Primitiveer: $\displaystyle\int x^2\,e^x\,dx$.

Tweemaal partieel integreren levert

$$\int x^2\,e^x\,dx = x^2\,e^x - \int 2x\,e^x\,dx = x^2\,e^x - 2\left(x\,e^x - \int e^x\,dx\right) = x^2\,e^x - 2x\,e^x + 2e^x + c\,.$$

Hierin is $c \in \mathbb{R}$ een integratieconstante.

$*$

(15) 4. Integraalvergelijkingen

We bekijken de volgende integraalvergelijking voor $y(x)$: $y(x) + k\displaystyle\int_0^x y^2(t)\,e^{-t}\,dt \;=\; p$. Hierin zijn $k, p \in \mathbb{R}$ reële constanten met $k > 0$.

(5) **a.** Laat zien dat de hierdoor impliciet gegeven functie $y = y(x)$ voldoet aan de niet-lineaire differentiaalvergelijking $y' + ky^2\,e^{-x} = 0$.

Gebruik makend van de hoofdstelling van de analyse (bij $*$) vind je

$$\frac{d}{dx}\left(y(x) + k\int_0^x y^2(t)\,e^{-t}\,dt - p\right) \stackrel{*}{=} y'(x) + ky^2(x)\,e^{-x} = 0\,.$$

(5) **b.** Bepaal de algemene oplossing $y(x)$ van deze differentiaalvergelijking.

Dit is een homogene, niet-lineaire, separabele differentiaalvergelijking, die je kunt herschrijven als

$$\frac{dy}{y^2} = -ke^{-x}\,dx\,.$$

Integreren levert $-\frac{1}{y} + c = ke^{-x}$ voor willekeurige $c \in \mathbb{R}$, oftewel $y(x) = \dfrac{1}{c - ke^{-x}}$.

(5) **c.** Bepaal de expliciete oplossing $y(x)$ van bovenstaande integraalvergelijking en geef aan welke waarden de parameter c (uitgedrukt in p en k) mag aannemen.

De integraalvergelijking legt de beginvoorwaarde vast: kennelijk is $y(0) = p$. Uit voorgaand onderdeel volgt dan $\dfrac{1}{c-k} = p$, oftewel $c = \dfrac{1}{p} + k$, dus

$$y(x) = \frac{p}{pk(1 - e^{-x}) + 1}\,.$$

Dit geldt voor alle $p \neq 0$. Het geval $p = 0$ moet apart gecontroleerd worden, maar dat de oplossing ($y(x) = 0$) ook hiervoor geldt zie je direct aan de integraalvergelijking.

*

(15) 5. Differentiaalvergelijkingen

Beschouw de door $c \geq 0$ geparametriseerde familie van eerste orde differentiaalvergelijkingen voor $y(x)$:

$$y'^2 + y^2 = c\,.$$

($7\frac{1}{2}$) **a.** Los de tweede orde differentiaalvergelijking $y'' + y = 0$ op onder de beginvoorwaarden $y(0) = A$ en $y'(0) = B$, voor gegeven constanten $A, B \in \mathbb{R}$.

Oplossing van de differentiaalvergelijking zonder beginvoorwaarden: $y(x) = a\cos x + b\sin x$, $a, b \in \mathbb{R}$ willekeurig. Leg je de beginvoorwaarden op dan vind je dat $a = A$ en $b = B$.

($7\frac{1}{2}$) **b.** Los nu de oorspronkelijke eerste orde differentiaalvergelijking voor $y(x)$ op en bepaal daarbij tevens het verband tussen c en de bij onderdeel a geïntroduceerde constanten A en B.

Door de oorspronkelijke differentiaalvergelijking te differentiëren krijg je $2y'(y'' + y) = 0$, d.i. precies de differentiaalvergelijking $y'' + y = 0$ uit onderdeel a, òf $y' = 0$. De laatste i.c.m. de gegeven niet-lineaire differentiaalvergelijking en beginvoorwaarden geeft $y = A = \sqrt{c}$. Vullen we de oplossing van de eerste uit onderdeel a, $y(x) = A\cos x + B\sin x$, in in de oorspronkelijke eerste orde differentiaalvergelijking, dan vinden we $c = A^2 + B^2$.

***