HERTENTAMEN CALCULUS

Vakcode: 2DM10. Datum: Dinsdag 29 januari 2012. Tijd: 09:00–12:00. Locatie:

Lees dit eerst!

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.
- Het tentamen bestaat uit 5 vragen. De waardering is aangegeven in de kantlijn.
- Het gebruik van boek, calculator, laptop of andere hulpmiddelen is niet toegestaan.
- Alle variabelen en functies zijn reëelwaardig tenzij uitdrukkelijk anders aangegeven.

Succes!

(10) 1. Volledige inductie

Bewijs middels volledige inductie dat voor geheeltallige $k \geq 2$ en alle $x > -1$ geldt

$$\frac{d^k}{dx^k}(x\ln(1+x)) = \frac{(-1)^k(k-2)!}{(1+x)^{k-1}}(1+\frac{k-1}{1+x})\,.$$

Voor de inductiestap moeten we de functie $f(x) = x\ln(1+x)$ tweemaal differentiëren. We krijgen respectievelijk $f'(x) = \ln(1+x) + 1 - \frac{1}{1+x}$ en $f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}$. De laatste identiteit komt overeen met de stelling voor $k = 2$.

Stel dat voor zekere $k \geq 2$ bovenstaande identiteit geldt (inductiehypothese), dan volgt

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(x\ln(1+x)) = \frac{d}{dx}\frac{d^k}{dx^k}(x\ln(1+x)) \overset{*}{=} \frac{d}{dx}\frac{(-1)^k(k-2)!}{(1+x)^{k-1}}(1+\frac{k-1}{1+x}) \overset{\star}{=} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}(1+\frac{k}{1+x})\,.$$

Bij $*$ is de inductiehypothese gebruikt, bij $\star$ de productregel voor differentiëren en elementaire vereenvoudiging.

$*$

(30) 2. Differentiëren & Taylorontwikkeling

(10) **a.** Bewijs de Taylorontwikkeling

$$x\ln(1+x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{4}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n-1}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \quad \text{rond } x = 0.$$

Dit volgt uit de Taylorformule $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \mathcal{O}(x^{n+1})$ rond $x = 0$ en opgave 1. Merk op dat $f(0) = f'(0) = 0$ en $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^k k!}{k-1}$ voor $k \geq 2$.

(10) **b.** Bepaal de afgeleide van $f(x) = e^{-x}\cos(2x-1)$.

Produkt- en kettingregel toepassend vind je

$$f'(x) = -e^{-x}\cos(2x-1) + e^{-x}(-2\sin(2x-1)) = -e^{-x}(\cos(2x-1) + 2\sin(2x-1))\,.$$

(10) **c.** Bepaal de afgeleide van $f(x) = \displaystyle\int_1^{x^2+1} \frac{1}{\ln t}\, dt$.

Schrijf $P(t)$ voor de primitieve van $p(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{1}{\ln t}$. Dan geldt

$$f'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dx}\int_1^{x^2+1} p(t)\, dt = \frac{d}{dx}\left(P(t)\Big|_1^{x^2+1} \right) = \frac{d}{dx}\left(P(x^2+1) - P(1)\right) \stackrel{*}{=} 2x\, p(x^2+1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2x}{\ln(x^2+1)}\,.$$

Bij $*$ is de produktregel gebruikt, evenals de hoofdstelling van de analyse. Merk op dat je de expliciete vorm van $P(t)$ niet nodig hebt.

$*$

(30) 3. Primitiveren en integreren

(10) **a.** Primitiveer: $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\, dx$.

Substitutie van variabele $y = 1 + \sin x$ levert

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\, dx = \int \frac{1}{y}\, dy\Big|_{y\,=\,1+\sin x} = \ln|y|\Big|_{y\,=\,1+\sin x} + c = \ln(1+\sin x) + c\,.$$

Hierin is $c \in \mathbb{R}$ een integratieconstante. Merk op dat je de modulusstrepen mag weglaten, omdat $1 + \sin x \geq 0$ voor alle toegestane x.

(10) **b.** Integreer: $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\,(2+\ln|x|)(3+\ln|x|)}\, dx$.

Substitueer $y = \ln|x|$, dus $dy = \frac{1}{x}\, dx$:

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x\,(2+\ln|x|)(3+\ln|x|)}\, dx = \int_1^2 \frac{1}{(y+2)\,(y+3)}\, dy \stackrel{*}{=} \int_1^2 \left(\frac{1}{y+2} - \frac{1}{y+3} \right) dy \stackrel{*}{=} \ln|y+2| - \ln|y+3|\Big|_1^2 = \ln\frac{16}{15}\,.$$

De identiteit $*$ verkrijg je middels breuksplitsing.

(10) **c.** Primitiveer: $\displaystyle\int x^2 \sin x\, dx$.

Tweemaal partieel integreren levert

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x\, dx = -x^2 \cos x + 2\left(x \sin x - \int \sin x\, dx \right) = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c\,.$$

Hierin is $c \in \mathbb{R}$ een integratieconstante.

$*$

(15) 4. Integraalvergelijkingen

We bekijken de volgende integraalvergelijking voor $y(x)$: $y(x) - \displaystyle\int_0^x e^{-y(t)}\, dt \;=\; p$. Hierin is $p \in \mathbb{R}$ een reële constante.

(5) **a.** Laat zien dat de hierdoor impliciet gegeven functie $y = y(x)$ voldoet aan de niet-lineaire

differentiaalvergelijking $y' - e^{-y} = 0$.

Gebruik makend van de hoofdstelling van de analyse (bij $*$) vind je

$$\frac{d}{dx}\left(y(x) - \int_0^x e^{-y(t)}\,dt - p\right) \stackrel{*}{=} y'(x) - e^{-y(x)} = 0\,.$$

(5) **b.** Bepaal de algemene oplossing $y(x)$ van deze differentiaalvergelijking. Noem de integratieconstante c.

Dit is een inhomogene, niet-lineaire, separabele differentiaalvergelijking, die je kunt herschrijven als

$$e^y\,dy = dx\,.$$

Integreren levert $e^y = x + c$ voor willekeurige $c \in \mathbb{R}$, oftewel $y(x) = \ln(x + c)$.

(5) **c.** Bepaal de expliciete oplossing $y(x)$ van bovenstaande integraalvergelijking en geef aan welke waarden de integratieconstante c (uitgedrukt in p) mag aannemen en wat het domein van de oplossing is (eveneens uitgedrukt in p) .

De integraalvergelijking legt de beginvoorwaarde vast: kennelijk is $y(0) = p$. Uit voorgaand onderdeel volgt dan $\ln c = p$, oftewel $c = e^p$, dus

$$y(x) = \ln(x + e^p)\,.$$

Het domein van deze oplossing wordt gegeven door het interval $(-e^p, \infty)$.

$*$

(15) 5. Differentiaalvergelijkingen

Beschouw de volgende tweede orde differentiaalvergelijking voor $y(x)$:

$$y'' + (1 - x^2)y = 0\,.$$

($7\frac{1}{2}$) **a.** Stel dat $y(x)$ voldoet aan de eerste orde differentiaalvergelijking $y' + xy = 0$. Laat zien dat $y(x)$ dan ook een oplossing is van bovenstaande tweede orde differentiaalvergelijking.

Eenmaal differentiëren van $y' + xy = 0$ levert $y'' + xy' + y = 0$. Vermenigvuldigen van $y' + xy = 0$ met x levert $xy' + x^2y = 0$. Deze twee resultaten van elkaar aftrekken levert $y'' + (1 - x^2)y = 0$.

($7\frac{1}{2}$) **b.** Vind een niet-triviale oplossing van de tweede orde differentiaalvergelijking.

Om een oplossing van $y'' + (1 - x^2)y = 0$ te vinden kun je onderdeel a gebruiken en $y' + xy = 0$ oplossen. Separatie van variabelen leidt dan eenvoudig tot de oplossing $y(x) = c\exp(-\frac{1}{2}x^2)$, $c \in \mathbb{R}$. (Merk op: Er wordt niet gevraagd naar de algemene oplossing.)

$***$