HERTENTAMEN AANSLUITINGSMODULE WISKUNDE VOOR BMT

Vakcode: 8G116. Datum: Woensdag 29 oktober 2003. Tijd: 14.00–16.00 uur. Plaats: WH 3A08/WH 3A10.

Lees dit vóórdat je begint!

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert. Lever je opgaven persoonlijk bij de surveillanten in. Niet op de tafels laten liggen!
- Het tentamen bestaat uit 20 vragen. De waardering per vraag staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef waar mogelijk exacte antwoorden, dus géén numerieke benaderingen.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of calculator is *niet* toegestaan.

VEEL SUCCES!

(5) **1.** Schrijf uit, d.w.z. werk de haakjes weg: $(m-2\,n)\,(3\,m+n)$

$(m-2\,n)\,(3\,m+n) = 3\,m^2 - 5\,m\,n - 2\,n^2$.

(5) **2.** Vereenvoudig: $\dfrac{3\,a^{-\frac{2}{3}}\,b^2}{2\,a^2\,b^{-\frac{1}{3}}}$

$\dfrac{3\,a^{-\frac{2}{3}}\,b^2}{2\,a^2\,b^{-\frac{1}{3}}} = \dfrac{3\,b^{\frac{7}{3}}}{2\,a^{\frac{8}{3}}} = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{b^7}{a^8}}$.

(5) **3.** Ontbind in factoren: $u^2 - 17\,u - 38$

$u^2 - 17\,u - 38 = (u-19)\,(u+2)$.

(5) **4.** Ontbind in factoren: $r^3 - 8\,r^2 - r + 8$

$r^3 - 8\,r^2 - r + 8 = (r+1)\,(r-1)\,(r-8)$.

(5) **5.** Herleid tot een veelterm plus restbreuk: $\dfrac{2\,x^2+3\,x-1}{x+1}$

$\dfrac{2\,x^2+3\,x-1}{x+1} = 2\,x + 1 - \dfrac{2}{x+1}$.

(5) **6.** Los op: $z + \sqrt{z} - 2 = 0$

$z + \sqrt{z} - 2 = 0$ d.e.s.d.a. $z = 1$. (IKC-methode: Isoleer de wortelterm, kwadrateer, los op, en controleer of de oplossing aan de oorspronkelijke vergelijking voldoet.)

(5) **7.** Los op: $\tan^2(2\,x+1) - (1+\sqrt{3})\,\tan(2\,x+1) + \sqrt{3} = 0$

Stel $y=\tan(2\,x+1)$, dan $y^2-(1+\sqrt{3})\,y+\sqrt{3}=(y-\sqrt{3})\,(y-1)=0$ d.e.s.d.a. $y=\sqrt{3}$ of $y=1$. M.a.w. $\tan(2\,x+1)=\sqrt{3}$ of $\tan(2\,x+1)=1$, d.e.s.d.a. $2\,x+1=\frac{\pi}{3}+k\pi$ of $2\,x+1=\frac{\pi}{4}+k\pi$ voor willekeurige $k\in\mathbb{Z}$, oftewel $x=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}+k\,\frac{\pi}{2}$ of $x=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+k\,\frac{\pi}{2}$.

(5) **8.** Los op: $\cos\left(\pi(x+\dfrac{1}{2})\right)=-\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

$\cos\left(\pi(x+\frac{1}{2})\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, d.e.s.d.a. $\pi(x+\frac{1}{2})=\pm\frac{3\,\pi}{4}+k\,2\pi$ voor willekeurige $k\in\mathbb{Z}$, m.a.w. $x=\pm\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+2\,k$, oftewel $x=-\frac{5}{4}+2\,k$ of $x=\frac{1}{4}+2\,k$.

(5) **9.** Los op: $2^{x^2+9}=64^x$

Beide leden van de vergelijking zijn te schrijven als machten van 2, nl. $2^{x^2+9}=2^{6\,x}$. Dit is equivalent met $x^2-6\,x+9=0$, oftewel $(x-3)^2=0$, d.e.s.d.a. $x=3$. (De vergelijking is voor alle $x\in\mathbb{R}$ gedefinieerd.)

(5) **10.** Los op: $\ln(x-2)=\ln\dfrac{1}{x+2}$

Het argument van de ln-functie moet altijd positief zijn, dus ($x>2$ en) $x>-2$. Als hieraan voldaan is geldt $x-2=\frac{1}{x+2}$, d.e.s.d.a. $x^2-5=0$ (en uiteraard $x\neq-2$), dus $x=\sqrt{5}$. De oplossing $x=-\sqrt{5}$ van de kwadratische vergelijking valt af omdat deze in strijd is met de eerder gestelde voorwaarde.

(5) **11.** Differentieer: $\dfrac{1}{x}$

$\left[\frac{1}{x}\right]'=-\frac{1}{x^2}$. Voorwaarde: $x\neq0$.

(5) **12.** Differentieer: $\cos\left(\pi(x-\dfrac{1}{3}\sqrt{3})\right)$

$\left[\cos\left(\pi(x-\frac{1}{3}\sqrt{3})\right)\right]'=-\pi\,\sin\left(\pi(x-\frac{1}{3}\sqrt{3})\right)$.

(5) **13.** Differentieer: $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{10\,x}$

$\left[\left(\frac{1}{10}\right)^{10\,x}\right]'=-10\,\ln 10\,\left(\frac{1}{10}\right)^{10x}$. (Dit is in te zien door $\frac{1}{10}$ te schrijven als $e^{-\ln 10}$ en de kettingregel toe te passen.)

(5) **14.** Differentieer: $(x+1)^2\,\cos(2\,x-1)$

$\left[(x+1)^2\,\cos(2\,x-1)\right]'=2\,(x+1)\,\cos(2\,x-1)-2\,(x+1)^2\,\sin(2\,x-1)$.

(5) **15.** Differentieer: $\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+x^2}}$

$\left[\frac{1}{1+\frac{1}{1+x^2}}\right]'=\frac{2\,x}{(x^2+2)^2}$. (Herleid $\frac{1}{1+\frac{1}{1+x^2}}$ bijvoorbeeld eerst tot $1-\frac{1}{x^2+2}$ en pas vervolgens de kettingregel toe.)

(5) **16.** Primitiveer: $\cos(2\,x-1)$

$\int \cos(2\,x-1)\,dx = \frac{1}{2}\,\sin(2\,x-1)+c$. Hierin is $c \in \mathbb{R}$ een willekeurige constante.

(5) **17.** Primitiveer: $\frac{1}{2^x}$

$\int \frac{1}{2^x}\,dx = -\frac{1}{2^x\,\ln 2}+c$. Hierin is $c \in \mathbb{R}$ een willekeurige constante.

(5) **18.** Primitiveer: $x\,e^x$

$\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + c$. Hierin is $c \in \mathbb{R}$ een willekeurige constante. De eerste gelijkheid volgt d.m.v. partiële integratie.

(5) **19.** Los op: $f' = c \quad$ (met $c \in \mathbb{R}$ een constante)

$f' = c$ d.e.s.d.a. $f(x) = c\,x + A$, voor zekere constante $A \in \mathbb{R}$.

(5) **20.** Los op: $\phi'' - \tau^2\,\phi = 0 \quad$ (met $\tau > 0$ een constante)

$\phi'' - \tau^2\,\phi = 0$ d.e.s.d.a. $\phi(x) = A\,e^{\tau\,x} + B\,e^{-\tau\,x}$, voor zekere constanten $A, B \in \mathbb{R}$. (Dit is overigens equivalent met $\phi(x) = a\,\sinh(\tau\,x) + b\,\cosh(\tau\,x)$ voor geschikt gekozen constanten $a, b \in \mathbb{R}$.)

Bonusopgave. Toon aan dat $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$.

Kwadrateer je de vergelijking $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$, dan krijg je $3+2\sqrt{2} = 1+2\sqrt{2}+2$, hetgeen inderdaad klopt. Linker- en rechterlid in de oorspronkelijke vergelijking zijn beide positief en hebben kennelijk hetzelfde kwadraat, dus zijn ze gelijk.

EINDE