TENTAMEN AANSLUITINGSMODULE WISKUNDE VOOR BMT

Vakcode: 8G116. Datum: Donderdag 30 september 2004. Tijd: 13.30–15.30 uur. Plaats: MA HAL.

Lees dit vóórdat je begint!

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert. Lever je opgaven persoonlijk bij de surveillanten in. Niet op de tafels laten liggen!
- Het tentamen bestaat uit 20 vragen. Het relatieve gewicht van iedere vraag staat aangegeven in de kantlijn (uitgedrukt in %).
- Geef waar mogelijk exacte antwoorden, dus géén numerieke benaderingen.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of calculator is *niet* toegestaan.
- Met uitzondering van opgaven 10 en 20 wordt uitsluitend je antwoord op iedere vraag beoordeeld, *niet* de manier waarop je hieraan gekomen bent. Gebruik dus kladpapier voor eventuele tussenstappen en neem je eindresultaten over op de in te leveren vellen. (Kladpapier niet inleveren!)
- Voorkom onnodige fouten: Besteed eventueel resterende tentamentijd aan nakijken!

VEEL SUCCES!

(*5*) **1.** Schrijf uit, d.w.z. werk de haakjes weg: $(2\,b - a + 1)\,(3\,b + 2\,a - 5)$

$(2\,b - a + 1)\,(3\,b + 2\,a - 5) = 6b^2 + ab - 2a^2 + 7a - 7b - 5.$

(*5*) **2.** Vereenvoudig: $\dfrac{(-2\,x\,y^4)^2}{(4\,x^2\,y)^3}$

$\dfrac{(-2\,x\,y^4)^2}{(4\,x^2\,y)^3} = \dfrac{1}{16}\dfrac{y^5}{x^4}.$

(*5*) **3.** Ontbind in factoren: $x^2 - 3\,x - 10$

$x^2 - 3\,x - 10 = (x+2)(x-5).$

(*5*) **4.** Ontbind in factoren: $\lambda^3 + \lambda^2 + 4\,\lambda + 4$

$\lambda^3 + \lambda^2 + 4\,\lambda + 4 = (\lambda+1)(\lambda^2+4).$

(*5*) **5.** Herleid tot een veelterm plus restbreuk: $\dfrac{2\,x^2 + x - 1}{x - 1}$

$\dfrac{2\,x^2 + x - 1}{x - 1} = 2x + 3 + \dfrac{2}{x-1}.$

(*5*) **6.** Los op: $y^2 + 2y + 5 = 0$

$y^2+2y+5=0$ heeft geen oplossing want de discriminant van de kwadratische vorm is $D=2^2-4\cdot1\cdot5=-16<0$.

(5) **7.** Los op: $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

Stel $y=\cos x$, dan $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 2y^2-3y+1 = 2(y-1)(y-\dfrac{1}{2}) = 0$ d.e.s.d.a. $y=1$ of $y=\frac{1}{2}$. M.a.w. $\cos x = 1$ of $\cos x = \frac{1}{2}$, d.e.s.d.a. $x = k\,2\pi$ of $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\,2\pi$ voor willekeurige $k\in\mathbb{Z}$.

(5) **8.** Los op: $\cos x\ \tan x = 1$

$\cos x\ \tan x = 1$ is goed gedefinieerd als $\cos x \neq 0$ (immers $\tan x = \sin x/\cos x$). In dat geval is de vergelijking equivalent met $\sin x = 1$, maar dit impliceert dat $\cos x = 0$ (denk aan de eenheidscirkel), hetgeen zojuist uitgesloten was. Deze vergelijking heeft dus geen oplossing.

(5) **9.** Los op: $2^{-x^2} = \dfrac{1}{4^x}$

Beide leden van de vergelijking zijn te schrijven als machten van 2, nl. $2^{-x^2}=2^{-2x}$. Dit is equivalent met $-x^2=-2x$, oftewel $x(x-2)=0$, d.e.s.d.a. $x=0$ of $x=2$. (De vergelijking is voor alle $x\in\mathbb{R}$ gedefinieerd.)

(5) **10.** Beredeer dat de vergelijking $\cos x = 1 + e^x$ géén oplossing kan hebben.

Voor alle $x\in\mathbb{R}$ geldt dat $e^x>0$, dus volgt voor het rechterlid dat $1+e^x>1$ ongeacht de waarde van x. Maar voor het linkerlid geldt $-1\leq\cos x\leq 1$. Dit zijn tegenstrijdige eisen, dus $x\in\emptyset$ (d.w.z. er is geen oplossing).

(5) **11.** Los op: ${}^{10}\log(x^2) = 4$

Door herschrijving van het rechterlid volgt dat de vergelijking geschreven kan worden als ${}^{10}\log(x^2) = {}^{10}\log(10\,000)$, d.e.s.d.a. $x^2 = 10\,000$, dus $x=\pm100$.

(5) **12.** Differentieer: $\cos\left(\dfrac{1}{2}x+\pi\right)$ **Z.O.Z.**

$\left[\cos\left(\frac{1}{2}x+\pi\right)\right]' = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x+\pi\right)$.

(5) **13.** Differentieer: ${}^2\log(x^2)$

$\left[{}^2\log(x^2)\right]' = \dfrac{2}{x\ln 2}$ $(x\neq0)$.

(5) **14.** Differentieer: $x\ \sin(2x)\ \cos(3x)$

$[x\ \sin(2x)\ \cos(3x)]' = 2x\cos(2x)\cos(3x)+\sin(2x)\cos(3x)-3x\sin(2x)\sin(3x)$. Dit volgt met behulp van de produktregel en de kettingregel, gevolgd door vereenvoudiging.

(5) **15.** Differentieer: $\operatorname{sinc} x \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\sin x}{x}$

$\left[\operatorname{sinc} x \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\sin x}{x}\right]' = \dfrac{x\ \cos x - \sin x}{x^2}$ $(x\neq0)$. Hierin is gebruik gemaakt van de quotiëntregel.

(5) **16.** Primitiveer: $\cos\left(3(x+\frac{\pi}{4})\right)$

$\int \cos\left(3(x+\frac{\pi}{4})\right)\,dx = \frac{1}{3}\sin\left(3(x+\frac{\pi}{4})\right) + c$. Hierin is $c \in \mathbb{R}$ een willekeurige constante.

(5) **17.** Primitiveer: e^{2x}

$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{2x} + c$. Hierin is $c \in \mathbb{R}$ een willekeurige constante.

(5) **18.** Primitiveer: $x\,e^x$

$\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = (x-1)\,e^x + c$. Hierin is $c \in \mathbb{R}$ een willekeurige constante. De eerste gelijkheid volgt d.m.v. partiële integratie.

(5) **19.** Los op: $f''' = 0$. (D.w.z. geef het *algemene* functievoorschrift $f(x)$ van alle functies f waarvan de derde orde afgeleide de nulfunctie is.)

Als $f'''(x) = 0$ dan $f''(x) = a$ voor één of andere constante $a \in \mathbb{R}$. Als een functie (hier f'') constant is, dan is haar primitieve (d.i. f') een eerstegraads functie, dus $f'(x) = ax + b$, met $a, b \in \mathbb{R}$ willekeurig. Op haar beurt heeft een eerstegraads functie (hier f') als primitieve (d.i. f) een tweedegraads functie, dus $f(x) = \frac{1}{2}\,ax^2 + bx + c$, met $a, b, c \in \mathbb{R}$ willekeurig. (Aangezien a willekeurig is mag je de factor $\frac{1}{2}$ in het eindresultaat ook weglaten.)

(5) **20.** Laat zien dat de functie f met functievoorschrift $f(x) = A\,\cos(x+\phi)$ voor willekeurige $A, \phi \in \mathbb{R}$ voldoet aan de differentiaalvergelijking $f'' + f = 0$.

Eénmaal differentiëren geeft $f'(x) = -A\,\sin(x+\phi)$. Nogmaals differentiëren levert $f''(x) = -A\,\cos(x+\phi)$. Klaarblijkelijk geldt $f''(x) = -f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, m.a.w. $f'' = -f$.

EINDE